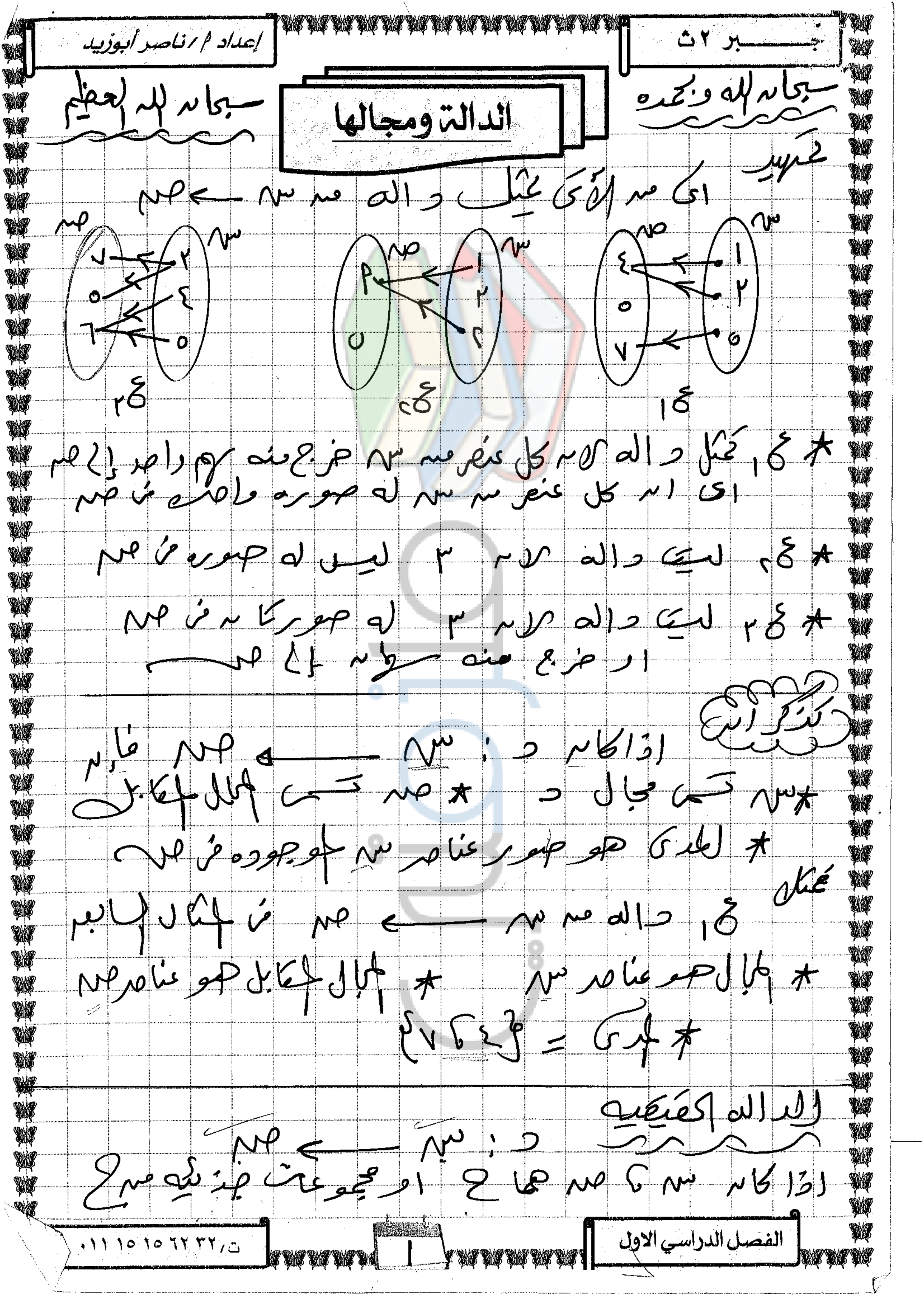


إعداد م / ناصر أبوزيد

سبحان الله وبحمده سبحان الله العظيم

الدالة ومجالها

تمهيد

اي من الآتي يمثل دالة من س ← ص

* ع١ تمثل دالة لان كل عنصر من س خرج منه سهم واحد إلى ص
اي ان كل عنصر من س له صورة واحدة في ص

* ع٣ ليست دالة لان ٣ ليس له صورة في ص

* ع٢ ليست دالة لان ٣ له صورتان في ص
او خرج منه سهمان الى ص

تذكر ان

اذا كانت د : س ← ص فإن

* س تسمى مجال د * ص تسمى المجال المقابل

* المدى هو صور عناصر س الموجودة في ص

مثال

ع١ دالة من س ← ص في المثال السابق

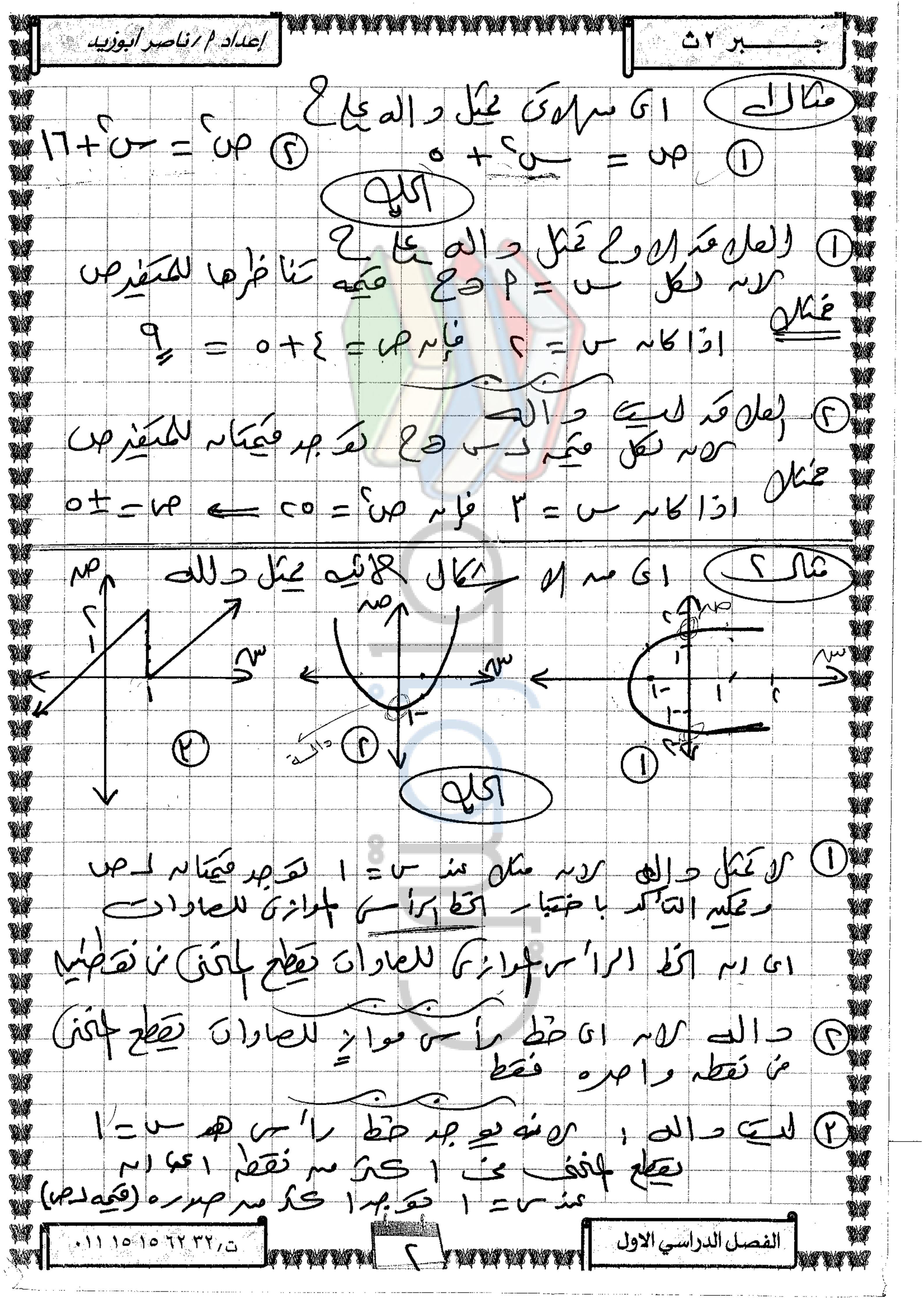
* المجال هو عناصر س * المجال المقابل هو عناصر ص

* المدى = {٤، ٧}

الدالة الحقيقية

د : س ← ص

اذا كانت س ، ص هما ح او مجموعات جزئية من ح



مثال ١

أي مما يأتي يمثل دالة ؟

① $ص = س^2 + ٥$ ② $ص^2 = س^2 + ١٦$

الحل

① الحل عند الأول تمثل دالة لماذا ؟
لأنه لكل $س \in ح$ فقيمة تناظرها للمتغير ص

مثال: إذا كانت $س = ٢$ فإن $ص = ٤ + ٥ = ٩$

② الحل هنا ليست دالة
لأنه لكل قيمة لـ $س \in ح$ نوجد قيمتان للمتغير ص

مثال: إذا كانت $س = ٣$ فإن $ص^2 = ٢٥ \leftarrow ص = \pm ٥$

مثال ٢

أي من الأشكال الآتية يمثل دالة

الحل

① لا تمثل دالة لأنه مثلا عند $س = ١$ نوجد قيمتان لـ ص
ويمكن التأكد باختبار الخط الرأسي الموازي للصادات
أي أن الخط الرأسي الموازي للصادات يقطع المنحنى في نقطتين

② دالة لأن أي خط رأسي موازي للصادات يقطع المنحنى في نقطة واحدة فقط

③ ليست دالة ، لأنه يوجد خط رأسي هو $س = ١$
يقطع المنحنى في أكثر من نقطة ١ ، ٢
عند $س = ١$ نوجد أكثر من صورة (قيمة لـ ص)



تقويم

أي من العلاقات الآتية تمثل دالة

① ص = √(س² + ٤) ✓ ③ (س − ص)² = ٩ ✗

② ص² = س² − ٥ ✓ ④ س ص + ص = ٢س

⑤ ص = ٣ ✓ ⑥ س = ٢ ✗

قواعد إيجاد مجال الدالة

(الدوال الحدودية والنسبية ... لها المجال نفسه "ح")

① مجال الدالة كثيرة الحدود هو ح

② مجال الدالة الكسرية هو ح − {أصفار المقام}

③ مجال الدالة الجذرية ص = ⁿ√د(س) : ن فردي هو ح

④ مجال الدالة الجذرية ص = ⁿ√د(س) : ن زوجي
نحل المتباينة د(س) ≥ صفر

⑤ مجال الدوال المثلثية ص = جا س ، ص = جتا س هو ح

قواعد حل متباينة الدرجة الثانية في متغير واحد

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة أس² + ب س + جـ = ٠ فإن ل < م

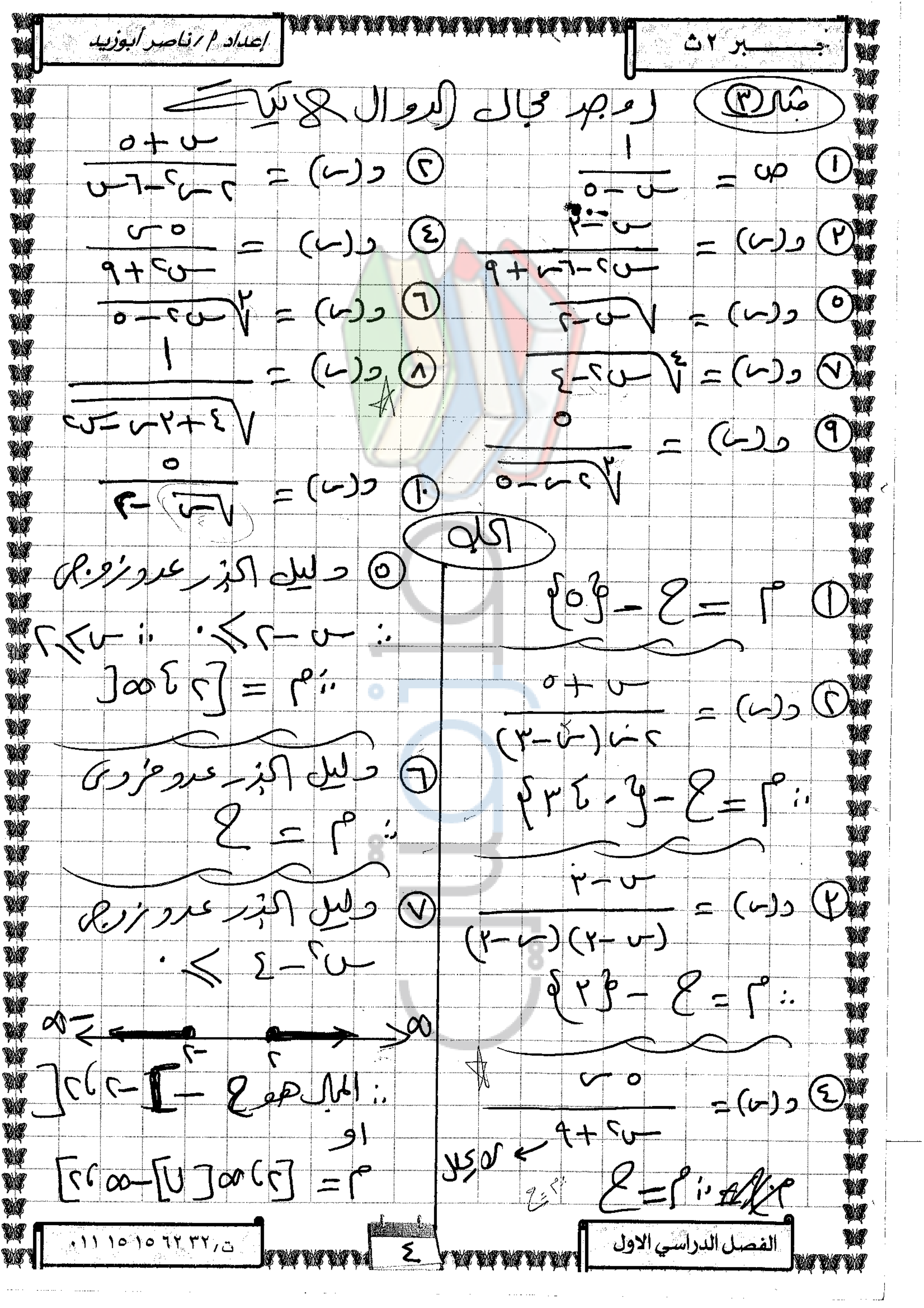
① أس² + ب س + جـ > ٠ ⟸ م.ح هي ح − [ل ، م]

② أس² + ب س + جـ ≥ ٠ ⟸ م.ح هي ح −]ل ، م[

③ أس² + ب س + جـ ≤ ٠ ⟸ م.ح هي [ل ، م]

④ أس² + ب س + جـ < ٠ ⟸ م.ح هي]ل ، م[

تذكر أن: س² + ٩ = صفر ليس لها حل في ح



مثال (٣) أوجد مجال الدوال الآتية

① $ص = \frac{1}{س - 5}$

② $د(س) = \frac{س - 3}{س^2 - 6س + 9}$

③ $د(س) = \frac{س + 5}{2س^2 - 6س}$

④ $د(س) = \frac{5س}{س^2 + 9}$

⑤ $د(س) = \sqrt{س - 2}$

⑥ $د(س) = \sqrt[3]{س^2 - 5}$

⑦ $د(س) = \sqrt[4]{س^2 - 4}$

⑧ $د(س) = \frac{1}{\sqrt{4 + 2س - س^2}}$

⑨ $د(س) = \frac{5}{\sqrt[3]{س^2 - 5}}$

⑩ $د(س) = \frac{5}{\sqrt{س} - 2}$

الحل

① $م = ح - \{5\}$

③ $د(س) = \frac{س + 5}{2س(س - 3)}$

$\therefore م = ح - \{0 ، 3\}$

② $د(س) = \frac{س - 3}{(س - 2)(س - 2)}$

$\therefore م = ح - \{2\}$

④ $د(س) = \frac{5س}{س^2 + 9}$ ← لا صفر

$\therefore م = ح$

⑤ دليل الجذر عدد زوجي

$\therefore س - 2 \geq 0 \quad \therefore س \geq 2$

$\therefore م = [2 ، \infty[$

⑥ دليل الجذر عدد فردي

$\therefore م = ح$

⑦ دليل الجذر عدد زوجي

$س^2 - 4 \geq 0$

$-\infty \quad -2 \quad 2 \quad \infty$

$\therefore$ المجال هو $ح -]-2 ، 2[$

أو

$م =]-\infty ، -2] \cup [2 ، \infty[$



⑧ ٤ + ٣س − س^٢ > ٠

لاحظ ان المقام ≠ صفر

بالضرب × −١

∴ س^٢ − ٣س − ٤ < ٠

(س − ٤) (س + ١) < ٠

−١ ـــــ ٤

م =]−١ ، ٤[

⑨ دليل اكبر مزدوج

المجال هو ح ماعدا اصفار المقام

م = ح − {٥/٢}

⑩ هنا شرطان

* المقام ≠ صفر

ان س ≠ ٤

* س ≥ ٠

∴ المجال هو [٠ ، ∞[− {٤}

تقويم

اوجد مجال مايلي

① د(س) = ⁴√(س^٢ − ٥س − ٦)

② د(س) = ١ / (|س − ١| − ٥)

③ د(س) = س^٢ − ٩

ح

ثق بالله

اذا كان د : ح^+ ← ح

د(س) = (س^٢ + ١) / س فإن

مجال الداله هو ح^+

مثال ٤

اوجد مجال الدوال

① د(س) = { ٢ ، س ≥ ١ ؛ −٢ ، س < ١ }

② د(س) = { ٥ − س ، ٠ < س < ١ ؛ س^٢ − ١ ، ١ ≤ س ≤ ٥ }

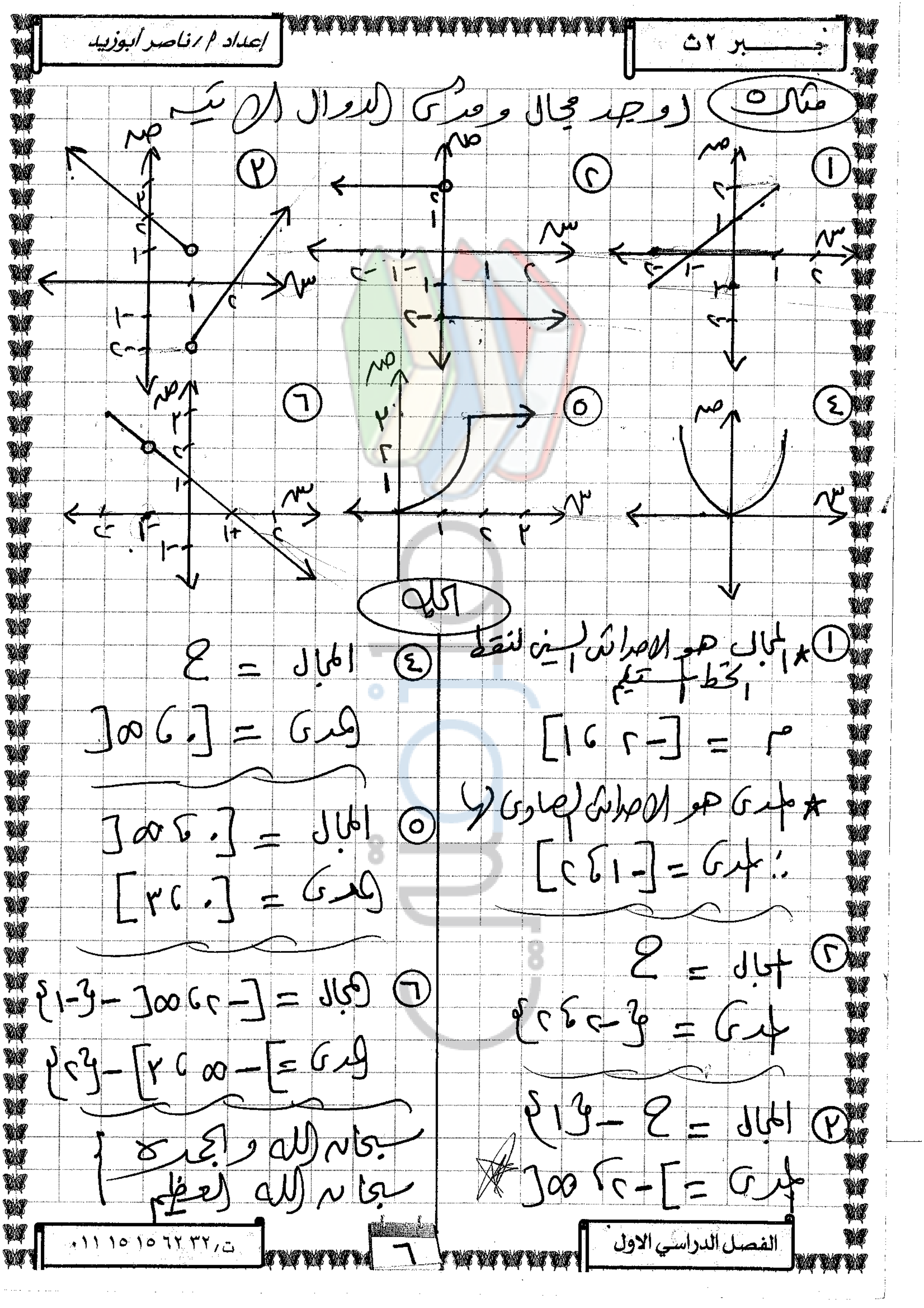
③ د(س) = { س − ٢ ، س ∈ [−٢ ، ١[؛ ٦ ، س ∈ [١ ، ٤] ؛ س + ٥ ، س ∈]٤ ، ∞[}

الحل

① م هو ح − {١}

② م هو]٠ ، ٥[

③ م =]−٢ ، ∞[



مثال: أوجد مجال ومدى الدوال الآتية

الحل

(١) * المجال هو الاحداثيات السينية لنقط الخط المستقيم

م = [-٢ ، ١]

* المدى هو الاحداثيات الصادية

∴ المدى = [-١ ، ٢]

(٢) المجال = ح

المدى = {-٢ ، ٢}

(٣) المجال = ح - {١}

المدى =]-٢ ، ∞[

(٤) المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞[

(٥) المجال = [٠ ، ∞[

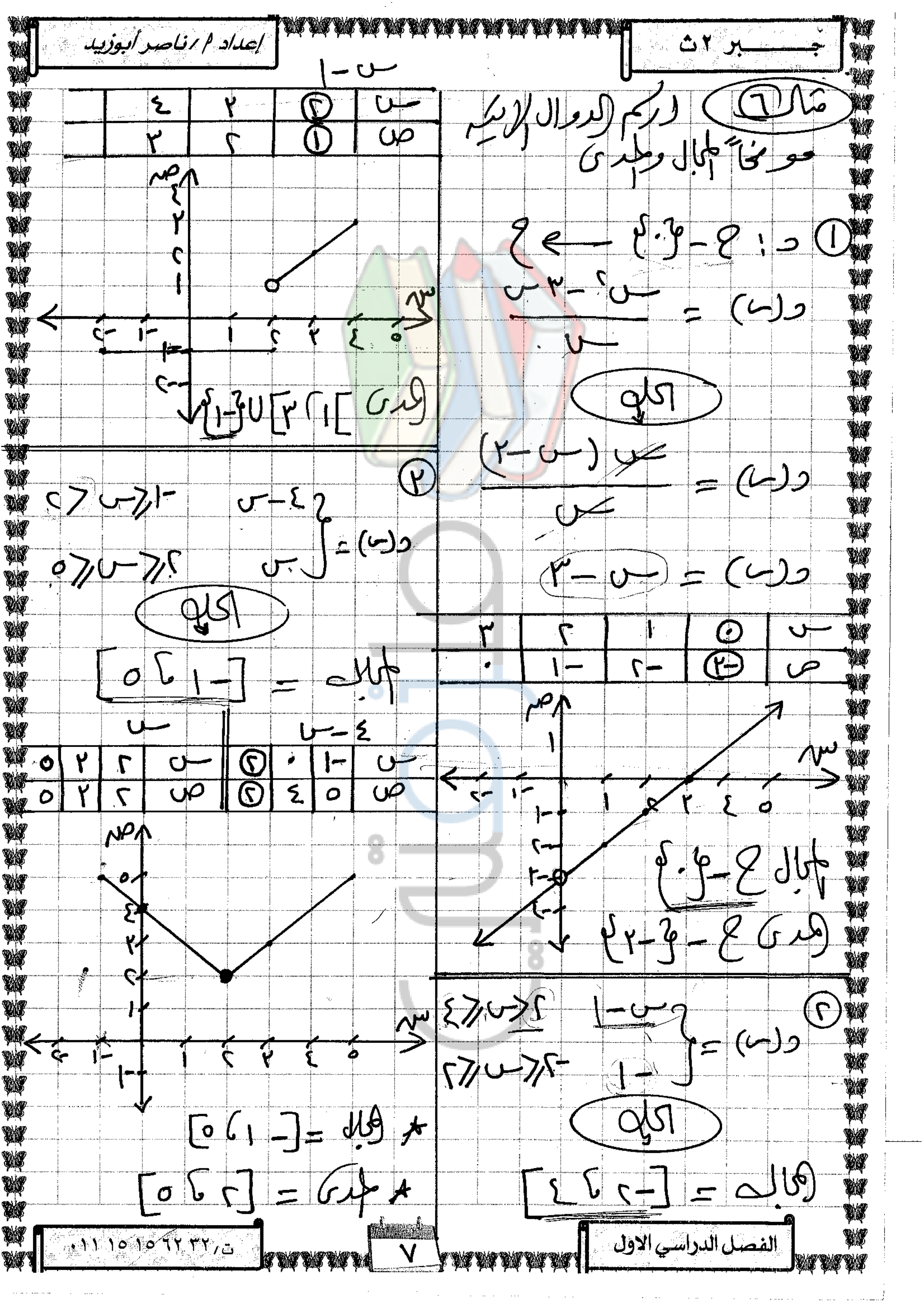
المدى = [٠ ، ٣]

(٦) المجال = [-٢ ، ∞[- {-١}

المدى =]-∞ ، ٣] - {٢}

سبحان الله وبحمده

سبحان الله العظيم



مثال (٦) ارسم الدوال الآتية موضحاً المجال والمدى

(١) د : ح - {٠} ← ح

د(س) = (س² - ٣س) / س

الحل

د(س) = س(س - ٣) / س

د(س) = س - ٣

س	٠	١	٢	٣
ص	-٣	-٢	-١	٠

المجال ح - {٠}

المدى ح - {-٣}

(٢) د(س) = { س - ١ عند ٢ < س ≤ ٤ ، -١ عند -٢ ≤ س < ٢ }

الحل

المجال = [-٢ ، ٤]

س - ١

س	٢	٣	٤
ص	١	٢	٣

المدى]١ ، ٣] ∪ {-١}

(٢) د(س) = { ٤ - س عند -١ ≤ س < ٢ ، س عند ٢ ≤ س ≤ ٥ }

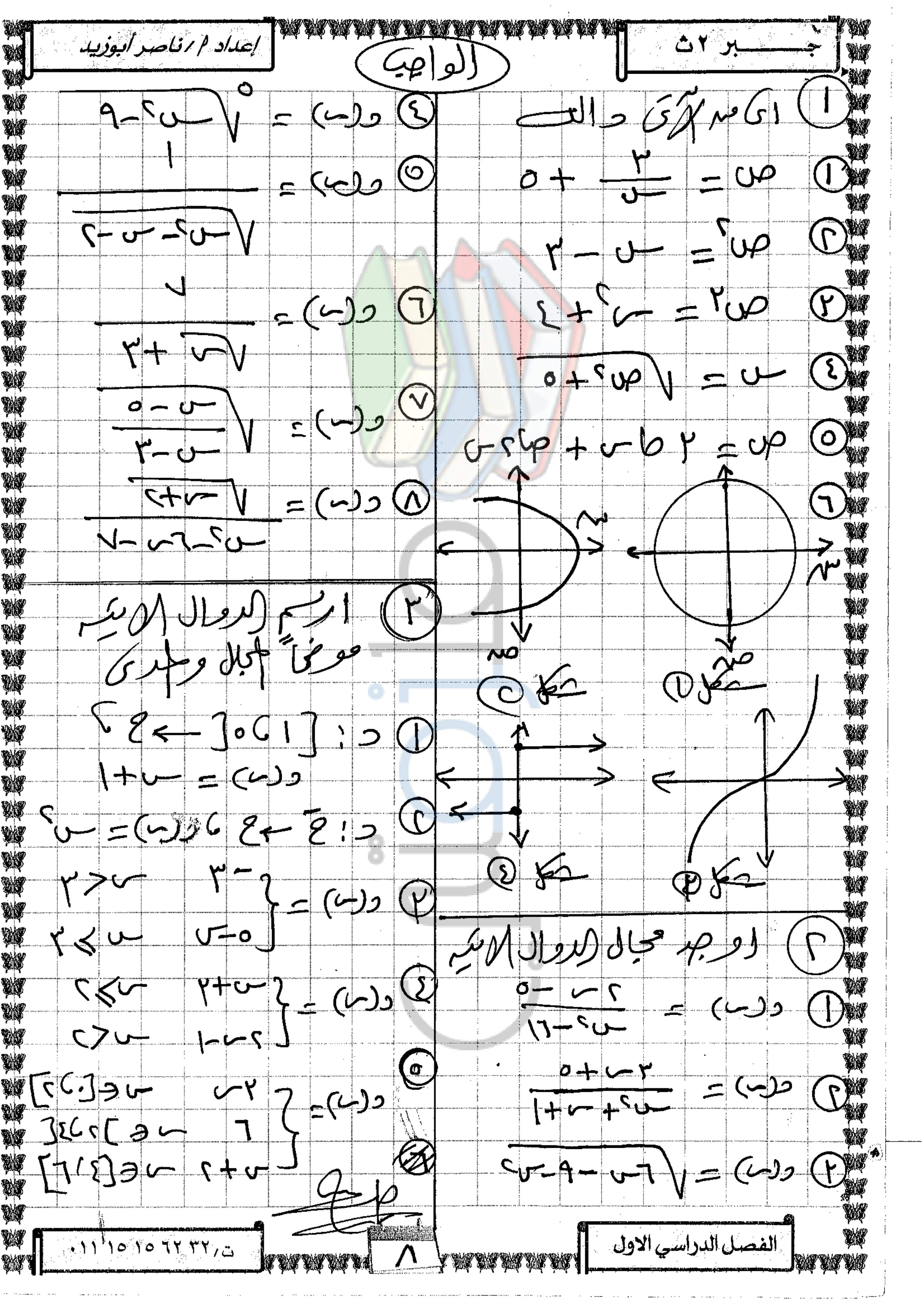
الحل

المجال = [-١ ، ٥]

	٤ - س				س		
س	-١	٠	٢	س	٢	٣	٥
ص	٥	٤	٢	ص	٢	٣	٥

* المجال = [-١ ، ٥]

* المدى = [٢ ، ٥]



الواجب

① أي مما يأتي دالة

① ص = ٣/س + ٥

② ص² = س − ٣

③ ٢ص = س² + ٤

④ س = √(ص² + ٥)

⑤ ص = ٢ جا س + جتا ٢س

⑥

② أوجد مجال الدوال الآتية

① د(س) = (٢س − ٥) / (س² − ١٦)

② د(س) = (٣س + ٥) / (س² + س + ١)

③ د(س) = √(٦س − ٩ − س²)

④ د(س) = ⁵√(س² − ٩)

⑤ د(س) = ١ / √(س² − س − ٢)

⑥ د(س) = ٧ / (√س + ٣)

⑦ د(س) = √((س − ٥) / (س − ٣))

⑧ د(س) = √(س + ٢) / (س² − ٦س − ٧)

③ ارسم الدوال الآتية موضحا المجال والمدى

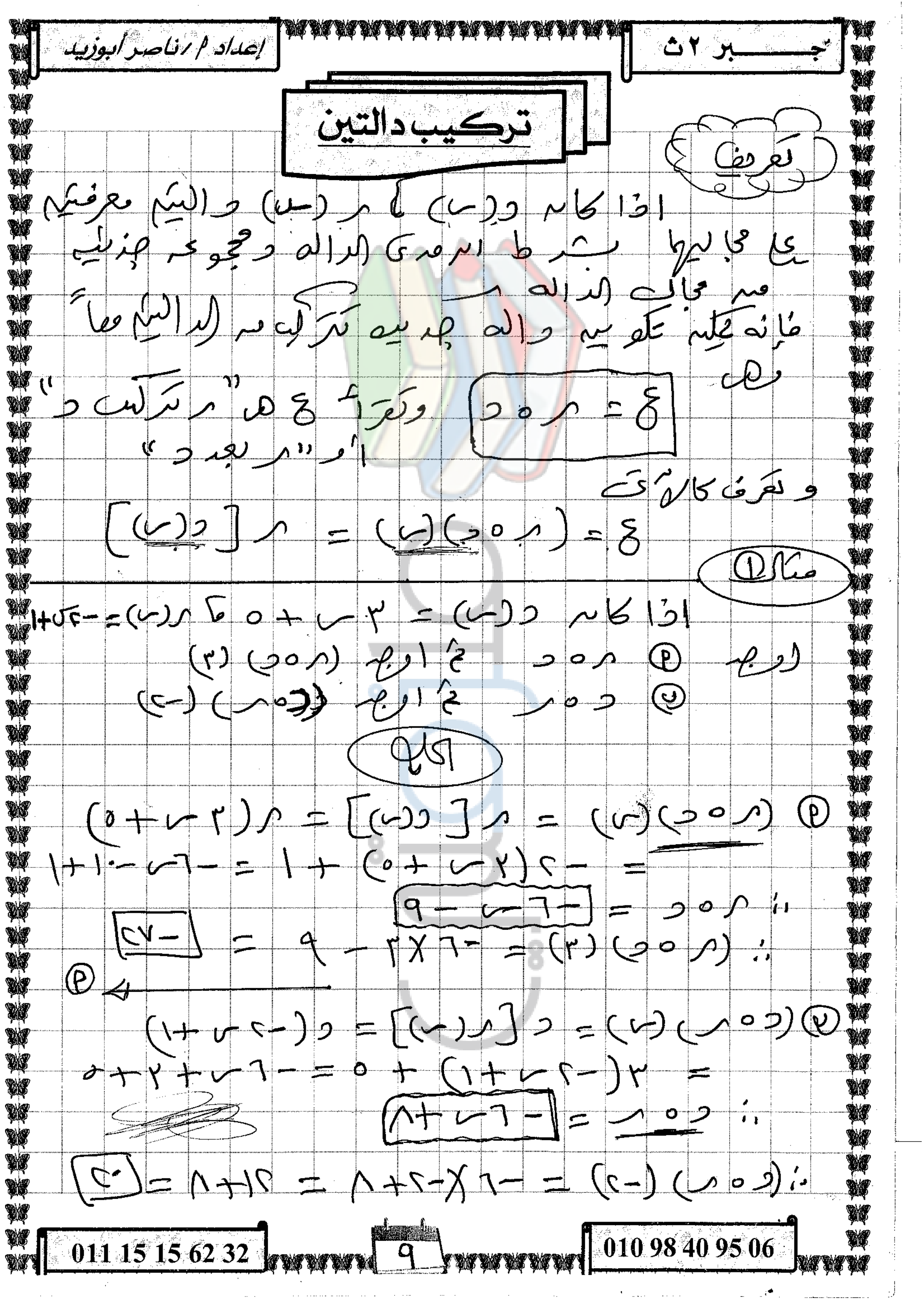
① د : [١، ٥] ← ح ، د(س) = س + ١

② د : ح ← ح ، د(س) = س²

③ د(س) = { −٣ ، س < ٢ ؛ ٥ − س ، س ≥ ٢ }

④ د(س) = { س + ٢ ، س ≥ ٢ ؛ ٢س − ١ ، س < ٢ }

⑤ د(س) = { ٢س ، س ∈ [٠، ٢] ؛ ٦ ، س ∈]٢، ٤[؛ س + ٢ ، س ∈ [٤، ٦] }



إعداد / ناصر أبوزيد

تركيب دالتين

تعريف

إذا كانت د(س) ، ر(س) دالتين معرفتين على مجاليهما بشرط المدى للدالة د مجموعة جزئية من مجال الدالة ر فإنه يمكن تكوين دالة جديدة تتركب من الدالتين معاً وهي

ع = ر ∘ د وتقرأ ع هي "ر تركيب د" أو "ر بعد د"

وتعرف كالآتي

ع = (ر ∘ د)(س) = ر[د(س)]

مثال ①

إذا كانت د(س) = ٣س + ٥ ، ر(س) = -٢س + ١

أوجد (أ) ر ∘ د ثم أوجد (ر ∘ د)(٣)

(ب) د ∘ ر ثم أوجد (د ∘ ر)(-٢)

الحل

(أ) (ر ∘ د)(س) = ر[د(س)] = ر(٣س + ٥)

= -٢(٣س + ٥) + ١ = -٦س - ١٠ + ١

∴ ر ∘ د = **-٦س - ٩**

∴ (ر ∘ د)(٣) = -٦ × ٣ - ٩ = **-٢٧**

(ب) (د ∘ ر)(س) = د[ر(س)] = د(-٢س + ١)

= ٣(-٢س + ١) + ٥ = -٦س + ٣ + ٥

∴ د ∘ ر = **-٦س + ٨**

∴ (د ∘ ر)(-٢) = -٦ × -٢ + ٨ = ١٢ + ٨ = **٢٠**



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

خطوات التأكد من إمكانية التركيب

الخطوة الأولى: تحديد مجال د(س) ومداها وأيضاً مجال ر(س) ومداها

الخطوة الثانية: إذا كان المطلوب (د ∘ ر) س

* نحدد مدى ر ومجال د
* نوجد مدى ر ∩ مجال د ← شرط التركيب

وهنا يوجد حالتان

[1] مدى ر ∩ مجال د = ϕ

∴ لا يمكن تركيب د∘ر لكل قيم س

[2] مدى ر ∩ مجال د ≠ ϕ

∴ يمكن تركيب د∘ر

ويكون مجال التركيب د∘ر = مجال ر ∩ مجال الدالة الناتجة من التركيب

مثال ٢: أوجد إن أمكن د∘ر إذا كانت د(س) = $\sqrt{س}$ ، ر(س) = −س² − ٢

الحل

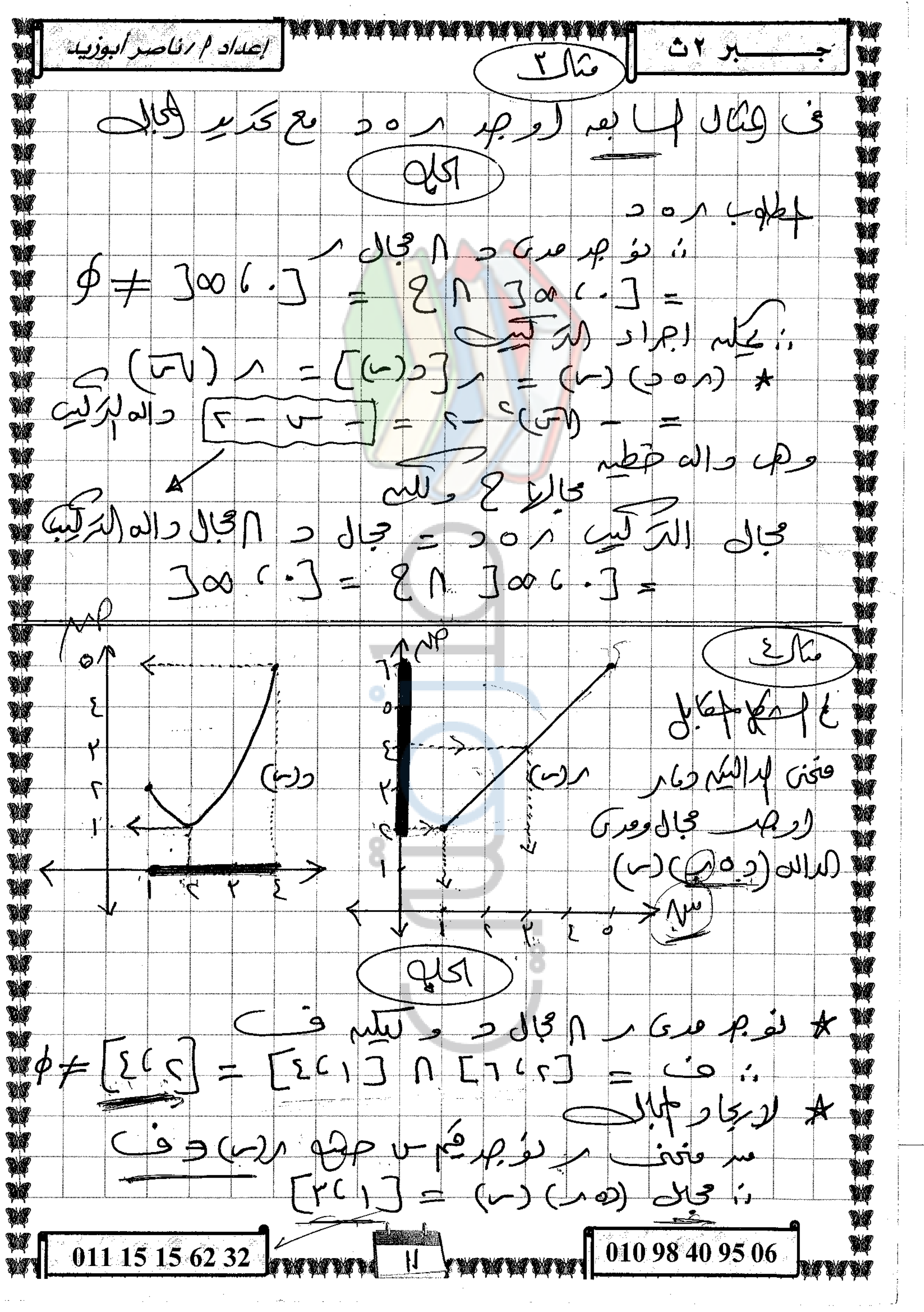
* د(س) = $\sqrt{س}$ ← المجال = [٠، ∞[، المدى = [٠، ∞[
* ر(س) = −س² − ٢ ← المجال = ح ، المدى =]−∞، −٢]

المطلوب د∘ر

∴ نوجد مدى ر ∩ مجال د

=]−∞، −٢] ∩ [٠، ∞[= ϕ

∴ لا يمكن إيجاد التركيب مهما كانت قيم س



مثال ٣

في المثال السابق أوجد ر ∘ د مع تحديد المجال

الحل

المطلوب ر ∘ د

∵ نوجد مدى د ∩ مجال ر

= [٠، ∞[∩ ح = [٠، ∞[≠ φ

∴ يمكن إجراء التركيب

★ (ر ∘ د)(س) = ر[د(س)] = ر(√س)

= −(√س)² − ٢ = [− س − ٢] ← دالة التركيب

وهي دالة خطية مجالها ح ولكن

مجال التركيب ر ∘ د = مجال د ∩ مجال دالة التركيب

= [٠، ∞[∩ ح = [٠، ∞[

مثال ٤

في الشكل المقابل منحنى الدالتين د، ر أوجد مجال ومدى الدالة (د ∘ ر)(س)

الحل

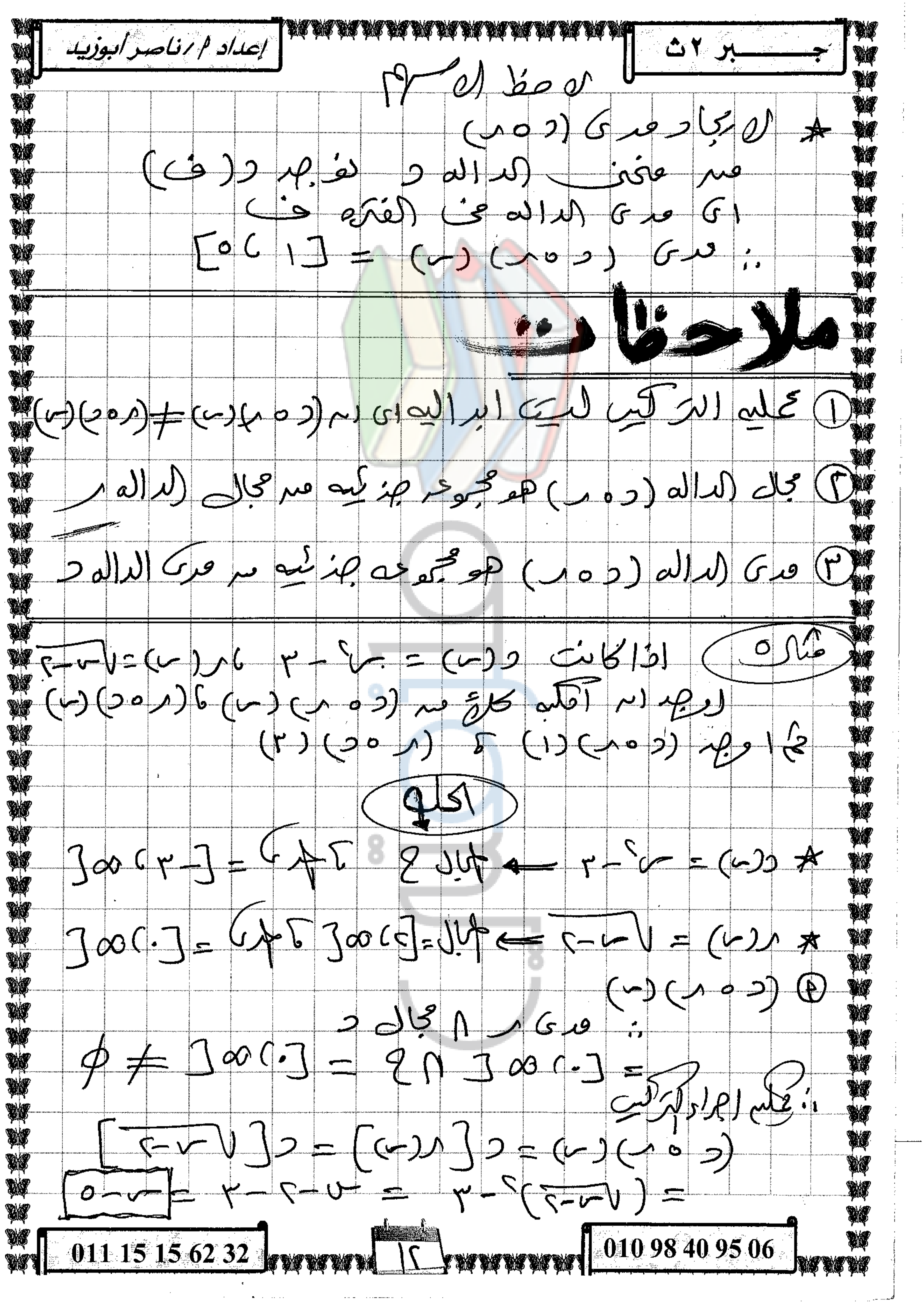
★ نوجد مدى ر ∩ مجال د وليكن ف

∴ ف = [٢، ٦] ∩ [١، ٤] = [٢، ٤] ≠ φ

★ لإيجاد المجال

من منحنى ر نوجد قيم س حيث ر(س) ∈ ف

∴ مجال (د ∘ ر)(س) = [١، ٣]



لاحظ الرسم

★ لإيجاد مدى (د ∘ ر)

من منحنى الدالة د نوجد د(ف)

أي مدى الدالة على الفترة ف

∴ مدى (د ∘ ر)(س) = [١ ، ٥]

ملاحظات

① عملية التركيب ليست ابدالية أي ان (د ∘ ر)(س) ≠ (ر ∘ د)(س)

② مجال الدالة (د ∘ ر) هو مجموعة جزئية من مجال الدالة ر

③ مدى الدالة (د ∘ ر) هو مجموعة جزئية من مدى الدالة د

مثال اذا كانت د(س) = س² − ٣ ، ر(س) = √(س − ٢)

أوجد ان أمكن كلاً من (د ∘ ر)(س) ، (ر ∘ د)(س)

ثم أوجد (د ∘ ر)(١) ، (ر ∘ د)(٣)

الحل

★ د(س) = س² − ٣ ⟵ مجال د = ح ، مد = [−٣ ، ∞[

★ ر(س) = √(س − ٢) ⟵ مجال ر = [٢ ، ∞[، مر = [٠ ، ∞[

① (د ∘ ر)(س)

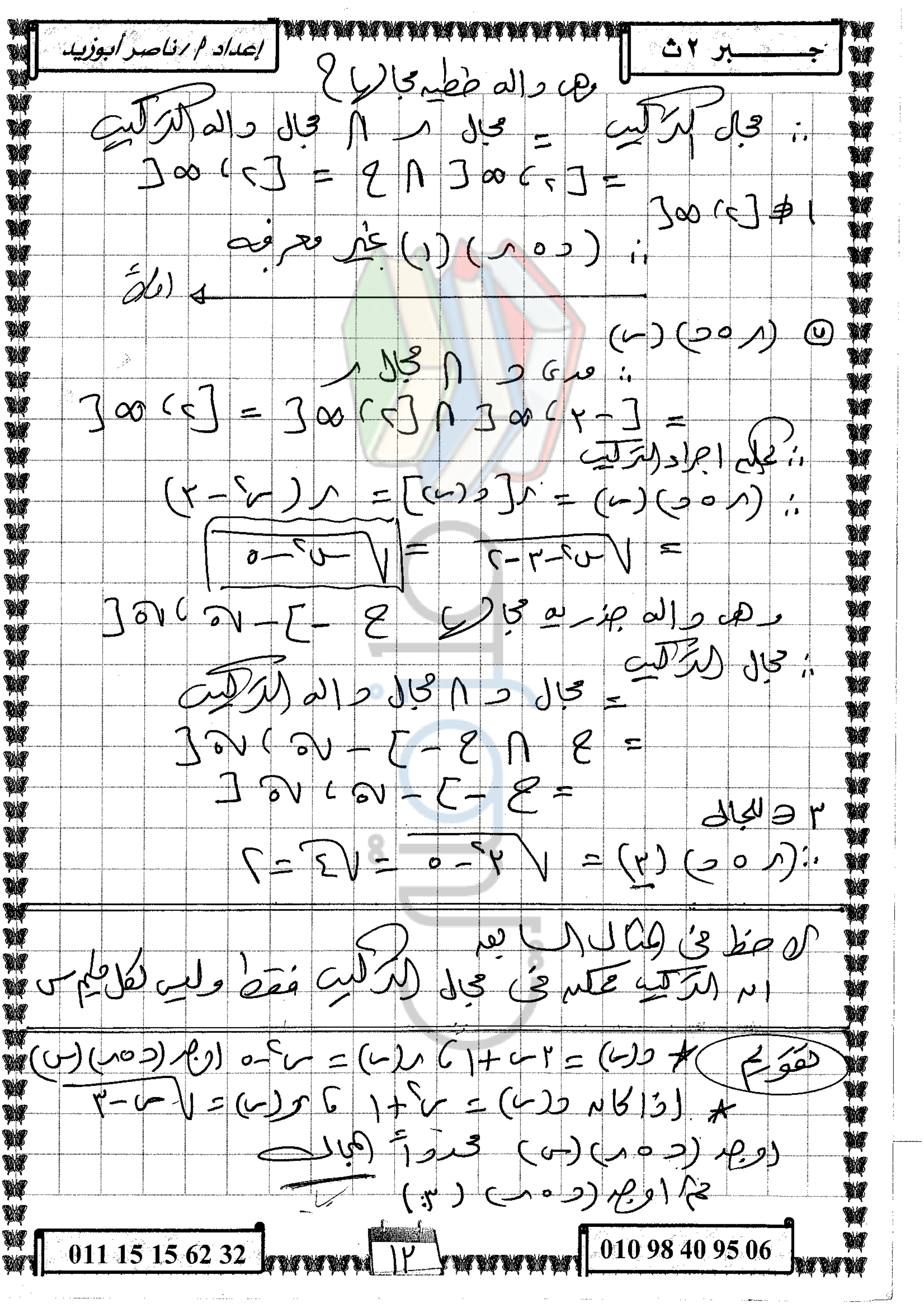
∵ مدى ر ∩ مجال د

= [٠ ، ∞[∩ ح = [٠ ، ∞[≠ φ

∴ يمكن اجراء التركيب

(د ∘ ر)(س) = د[ر(س)] = د[√(س − ٢)]

= (√(س − ٢))² − ٣ = س − ٢ − ٣ = س − ٥



وهي دالة خطية مجالها ح

∵ مجال التركيب = مجال ر ∩ مجال دالة التركيب

$= [٢ ، \infty[\cap ح = [٢ ، \infty[$

$١ \notin [٢ ، \infty[$

∴ (د ∘ ر)(١) غير معرفة

ـــ انتهى

(ب) (ر ∘ د)(س)

∵ مدى د ∩ مجال ر

$= [-٢ ، \infty[\cap [٢ ، \infty[= [٢ ، \infty[$

∴ يمكن إيجاد التركيب

∴ (ر ∘ د)(س) = ر[د(س)] = ر(س^٢ − ٣)

$= \sqrt{س^٢ - ٣ - ٢} = \sqrt{س^٢ - ٥}$

وهي دالة جذرية مجالها ح −]−$\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$[

∴ مجال التركيب

= مجال د ∩ مجال دالة التركيب

= ح ∩ ح −]−$\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$[

= ح −]−$\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$[

٣ ∈ المجال

∴ (ر ∘ د)(٣) $= \sqrt{٣^٢ - ٥} = \sqrt{٤} = ٢$

لاحظ في المثال السابق

أن التركيب محكم في مجال التركيب فقط وليس لكل قيم س

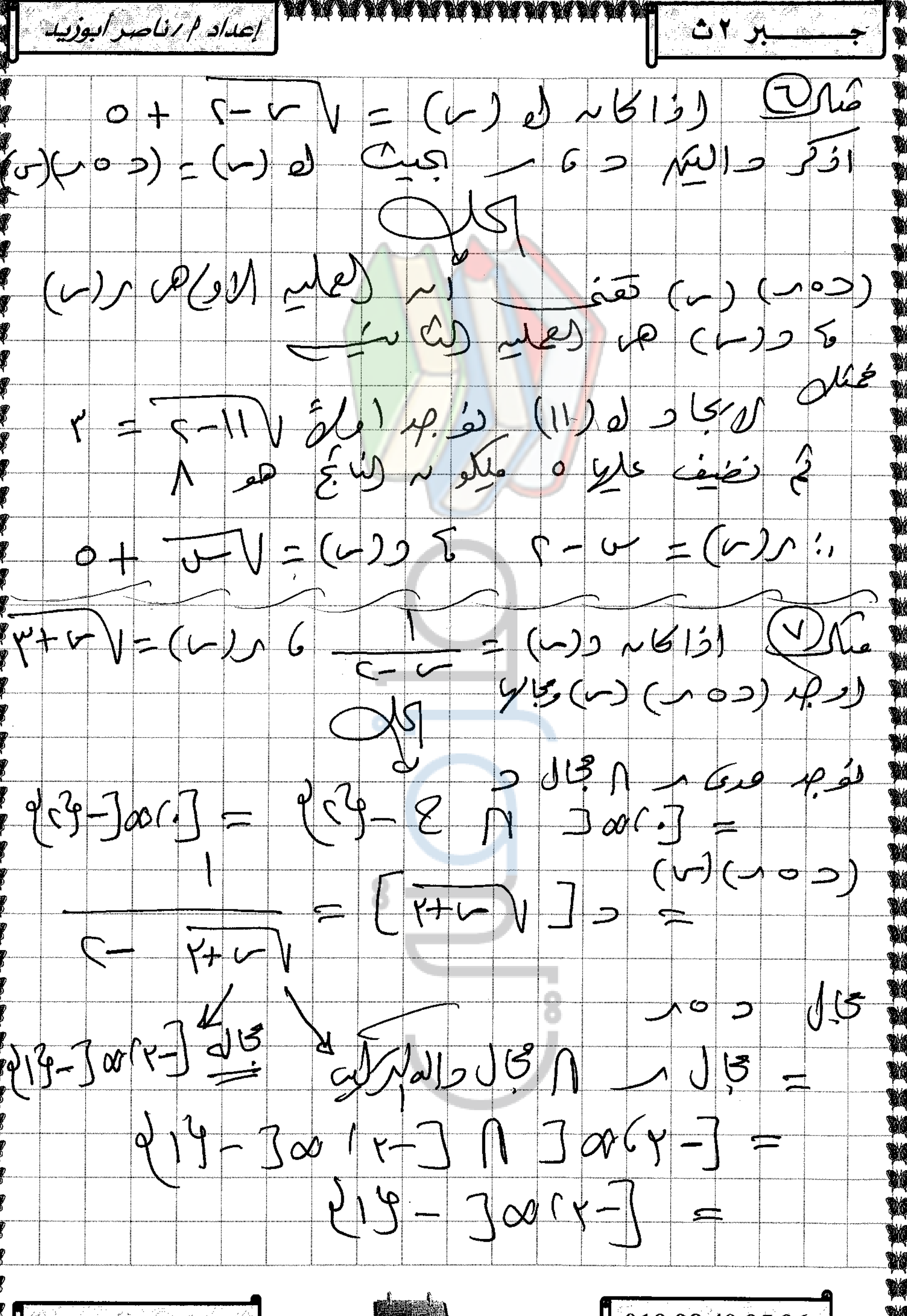
تقويم

★ د(س) = ٢س + ١ ، ر(س) = س^٢ − ٥ أوجد (د ∘ ر)(س)

★ إذا كان د(س) = س^٢ + ١ ، ر(س) = $\sqrt{س - ٣}$

أوجد (د ∘ ر)(س) محدداً المجال

ثم أوجد (د ∘ ر)(٣)



مثال ⑥ إذا كان $ه(س) = \sqrt{س - ٢} + ٥$

اذكر دالتين د ، ر بحيث $ه(س) = (د \circ ر)(س)$

الحل

$(د \circ ر)(س)$ تعني أن العملية الأولى هي $ر(س)$

وأن $د(س)$ هي العملية الثانية

مثلاً لإيجاد $ه(١١)$ نوجد أولاً $\sqrt{١١ - ٢} = ٣$

ثم نضيف عليها ٥ فيكون الناتج هو ٨

$\therefore ر(س) = س - ٢$ ، $د(س) = \sqrt{س} + ٥$

مثال ⑦ إذا كان $د(س) = \frac{١}{س - ٢}$ ، $ر(س) = \sqrt{س + ٢}$

أوجد $(د \circ ر)(س)$ ومجالها

الحل

نوجد مدى ر ∩ مجال د

$= [٠ ، \infty[\cap ح - \{٢\} = [٠ ، \infty[- \{٢\}$

$(د \circ ر)(س) = د[\sqrt{س + ٢}] = \frac{١}{\sqrt{س + ٢} - ٢}$

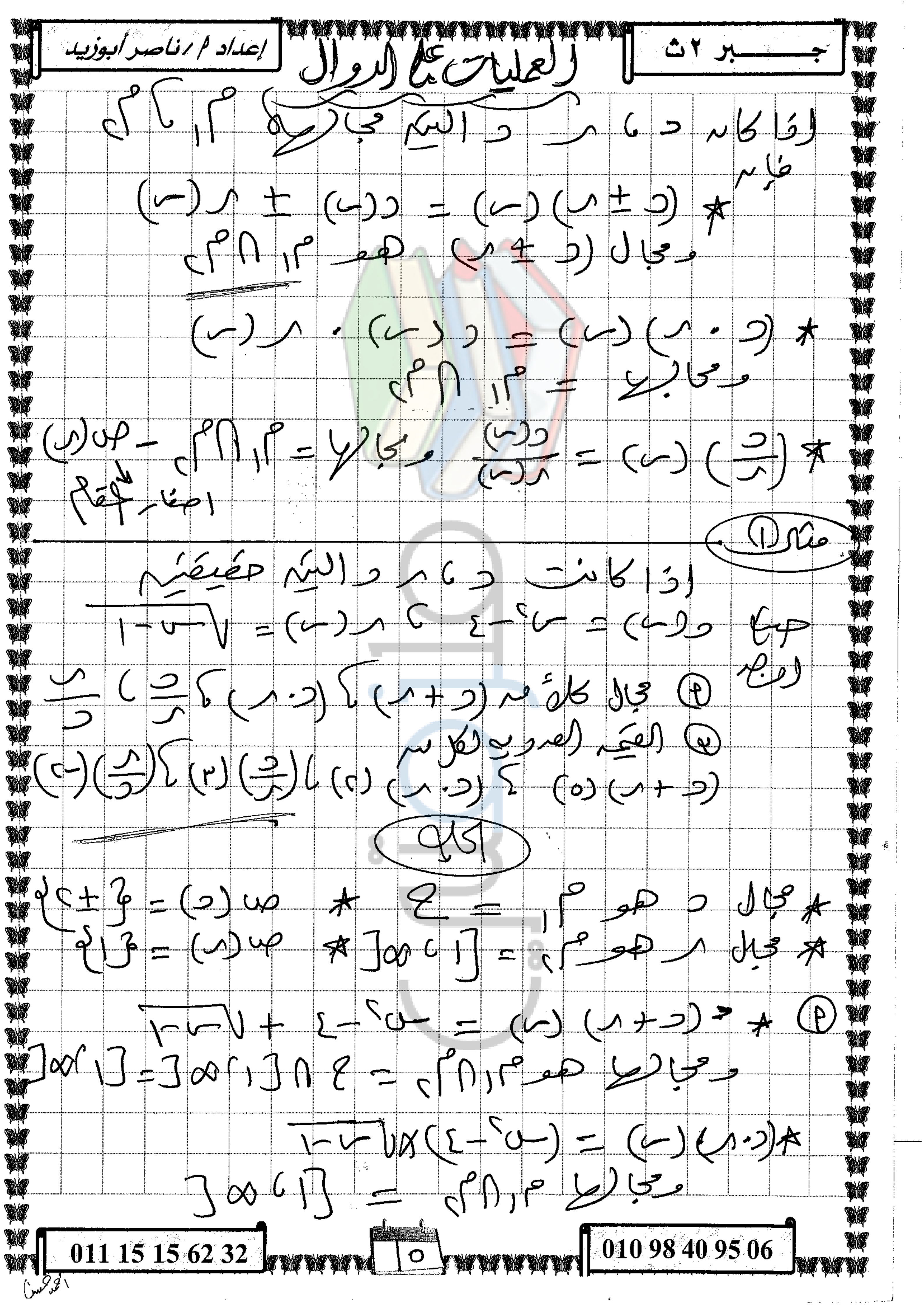
مجال د∘ر

$=$ مجال ر ∩ مجال الدالة المركبة

مجاله $[-٢ ، \infty[- \{٢\}$

$= [-٢ ، \infty[\cap [-٢ ، \infty[- \{٢\}$

$= [-٢ ، \infty[- \{٢\}$



إعداد م / ناصر أبوزيد

العمليات على الدوال

إذا كانت د ، ر دالتين مجالهما م$_1$ ، م$_2$ فإن

* (د ± ر)(س) = د(س) ± ر(س)

ومجال (د ± ر) هو م$_1$ ∩ م$_2$

* (د · ر)(س) = د(س) · ر(س)

ومجاله = م$_1$ ∩ م$_2$

* $\left(\frac{د}{ر}\right)$(س) = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ ومجاله = م$_1$ ∩ م$_2$ − ص(ر) أصفار المقام

مثال (1)

إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين

حيث د(س) = س^2 − ٤ ، ر(س) = $\sqrt{س - ١}$

أوجد (أ) مجال كل من (د + ر) ، (د · ر) ، $\frac{د}{ر}$ ، $\frac{ر}{د}$

(ب) القيمة العددية لكل من (د + ر)(٥) ، (د · ر)(٢) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$(٣) ، $\left(\frac{ر}{د}\right)$(−٢)

الحل

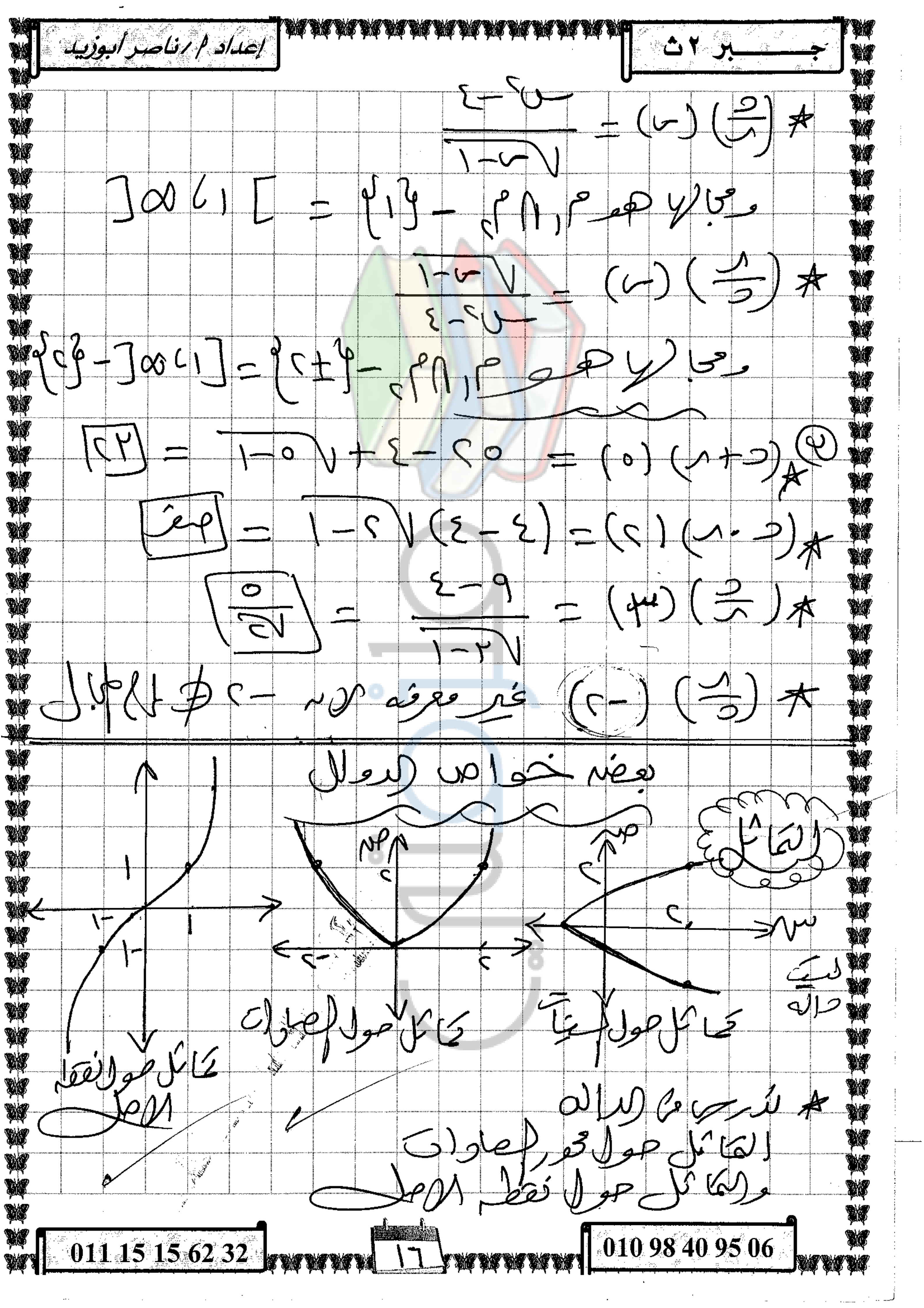
* مجال د هو م$_1$ = ح   * ص(د) = {٢ ، −٢} ±٢
* مجال ر هو م$_2$ = [١ ، ∞[* ص(ر) = {١}

(أ) * (د + ر)(س) = س^2 − ٤ + $\sqrt{س - ١}$

ومجالها هو م$_1$ ∩ م$_2$ = ح ∩ [١ ، ∞[= [١ ، ∞[

* (د · ر)(س) = (س^2 − ٤) × $\sqrt{س - ١}$

ومجالها م$_1$ ∩ م$_2$ = [١ ، ∞[



★ $\left(\frac{ق}{ر}\right)(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{\sqrt{س - ١}}$

ومجال $\frac{ق}{ر}$ هو $م_١ \cap م_٢ - \{١\} =]١ ، \infty[$

★ $\left(\frac{ر}{ق}\right)(س) = \frac{\sqrt{س - ١}}{س^{٢} - ٤}$

ومجال $\frac{ر}{ق}$ هو $م_١ \cap م_٢ - \{\pm ٢\} =]١ ، \infty[- \{٢\}$

★ $(ق + ر)(٥) = ٢٥ - ٤ + \sqrt{٥ - ١} = ٢٣$

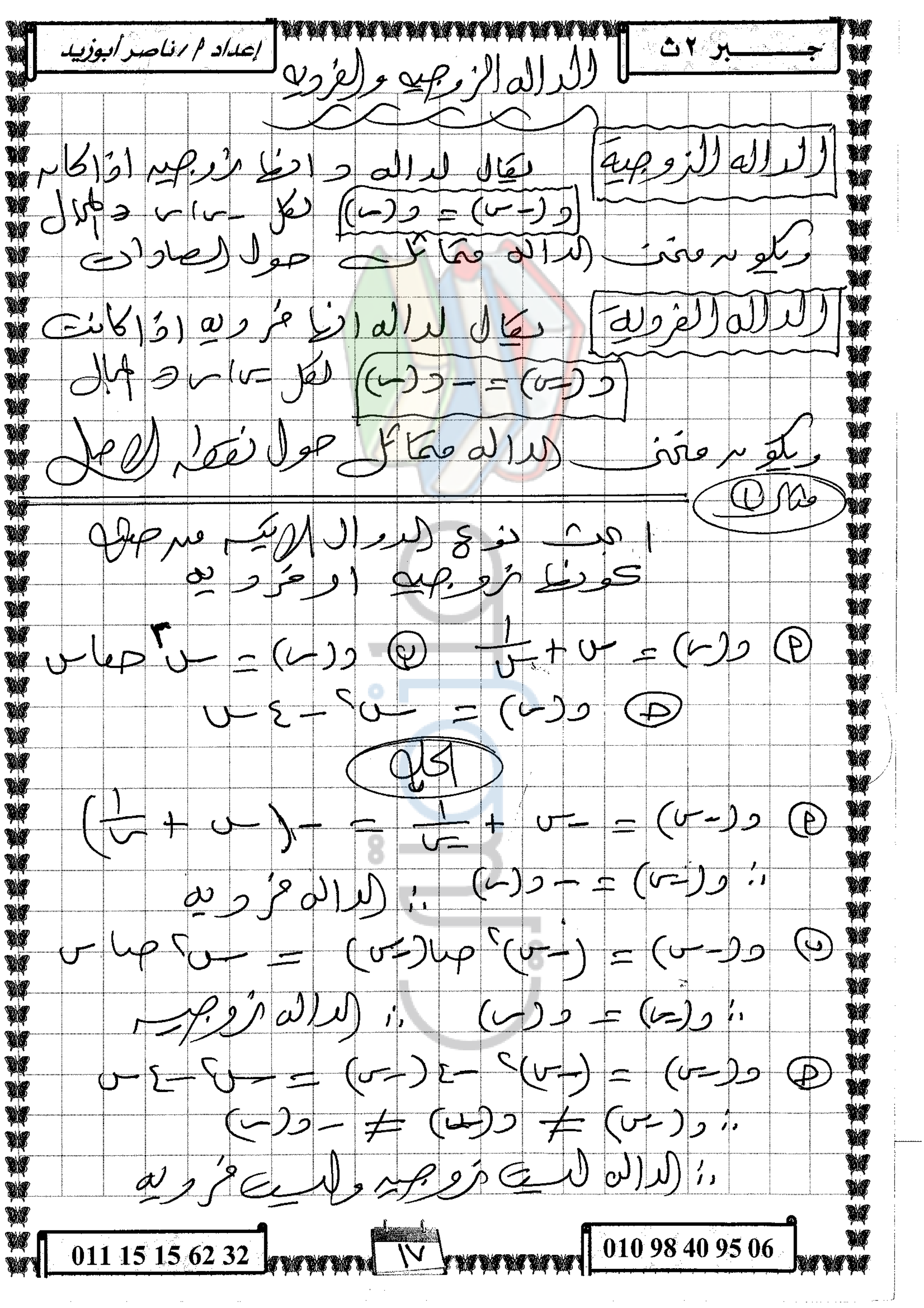
★ $(ق \cdot ر)(٢) = (٤ - ٤)\sqrt{٢ - ١} = صفر$

★ $\left(\frac{ق}{ر}\right)(٣) = \frac{٩ - ٤}{\sqrt{٣ - ١}} = \frac{٥}{\sqrt{٢}}$

★ $\left(\frac{ر}{ق}\right)(-٢)$ غير معرفة لأن $-٢ \notin$ المجال

بعض خواص الدوال

★ لندرس من الدالة
التماثل حول محور الصادات
والتماثل حول نقطة الأصل



إعداد م / ناصر أبوزيد

الدالة الزوجية والفردية

الدالة الزوجية

يقال للدالة د انها زوجية اذا كان $د(-س) = د(س)$ لكل س ، −س ∈ المجال

ويكون منحنى الدالة متماثل حول الصادات

الدالة الفردية

يقال للدالة انها فردية اذا كانت $د(-س) = -د(س)$ لكل س ، −س ∈ المجال

ويكون منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل

مثال ١

ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية

(أ) $د(س) = س + \frac{1}{س}$ (ب) $د(س) = س^3 جا س$

(ج) $د(س) = س^2 - ٤س$

الحل

(أ) $د(-س) = -س + \frac{1}{-س} = -(س + \frac{1}{س})$

∴ $د(-س) = -د(س)$ ∴ الدالة فردية

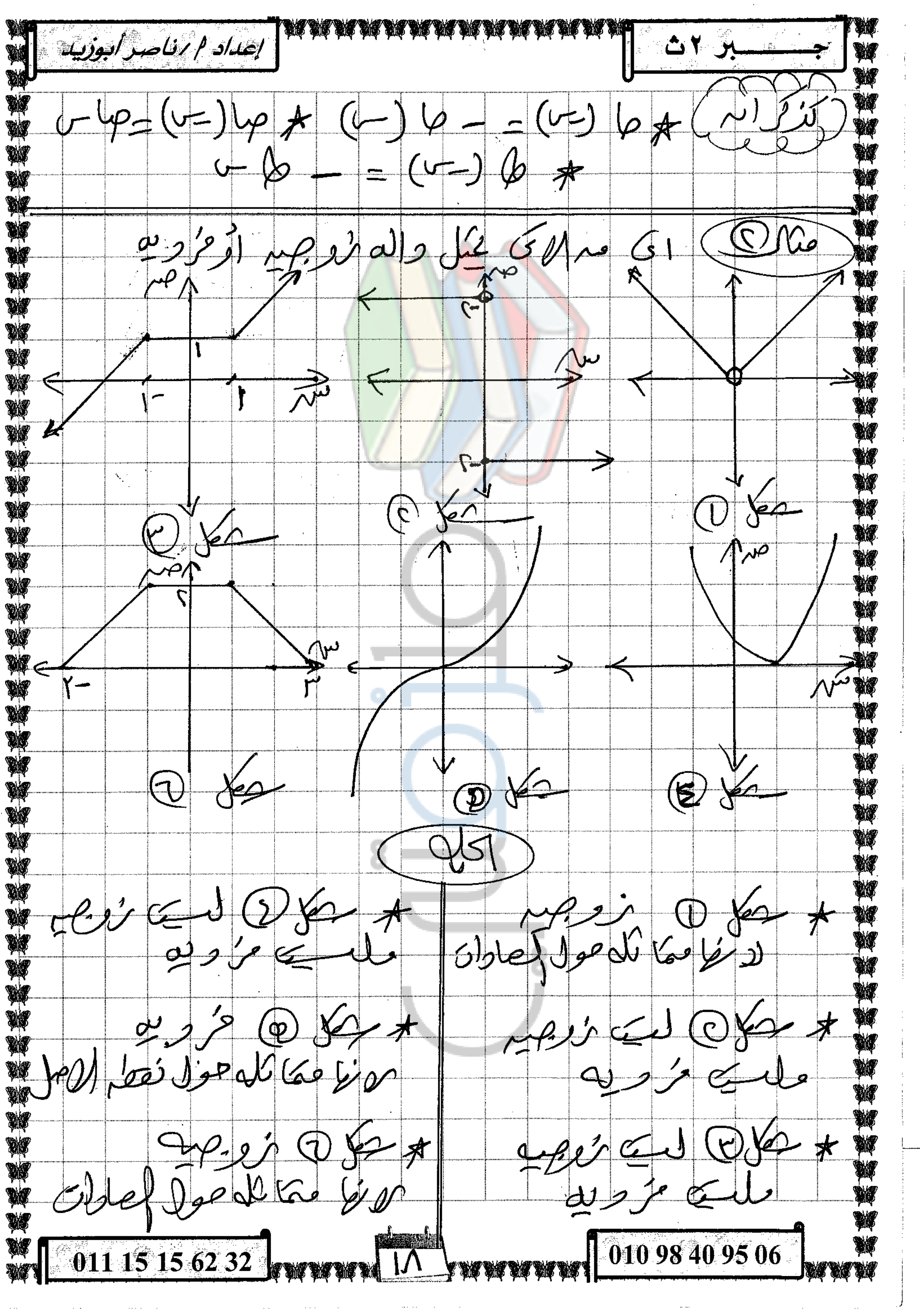
(ب) $د(-س) = (-س)^2 جا(-س) = -س^2 جا س$

∴ $د(-س) = د(س)$ ∴ الدالة زوجية

(ج) $د(-س) = (-س)^2 - ٤(-س) = س^2 - ٤س$

∴ $د(-س) \neq د(س) \neq -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية



تذكر أنه:

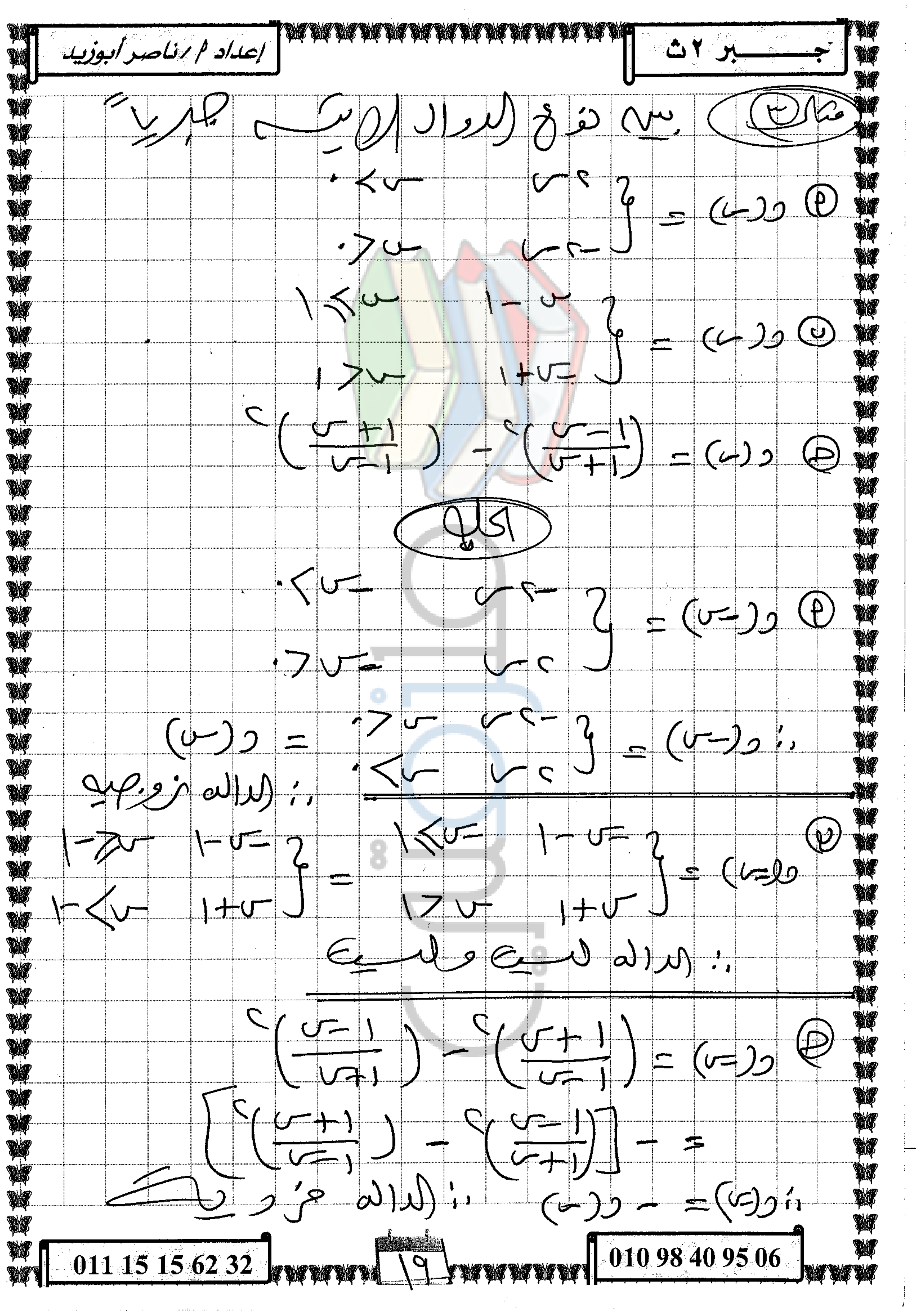
* جا(−س) = − جا(س) * جتا(−س) = جتا س

* ظا(−س) = − ظا س

مثال ②: أي مما يأتي يمثل دالة زوجية أو فردية

الحل

* شكل ① زوجية لأنها متماثلة حول الصادات
* شكل ② ليست زوجية وليست فردية
* شكل ③ ليست زوجية وليست فردية
* شكل ④ ليست زوجية وليست فردية
* شكل ⑤ فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل
* شكل ⑥ زوجية لأنها متماثلة حول الصادات



مثال (٣) بين نوع الدوال الآتية جبرياً

(أ) $د(س) = \begin{cases} س^2 & س \geq ٠ \\ س^2 & س < ٠ \end{cases}$

(ب) $د(س) = \begin{cases} س - ١ & س \geq ١ \\ -س + ١ & س < ١ \end{cases}$

(ج) $د(س) = \left(\frac{١ - س}{١ + س}\right)^2 - \left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^2$

الحل

(أ) $د(-س) = \begin{cases} س^2 & -س \geq ٠ \\ س^2 & -س < ٠ \end{cases}$

$\therefore د(-س) = \begin{cases} س^2 & س \leq ٠ \\ س^2 & س > ٠ \end{cases} = د(س)$

∴ الدالة زوجية

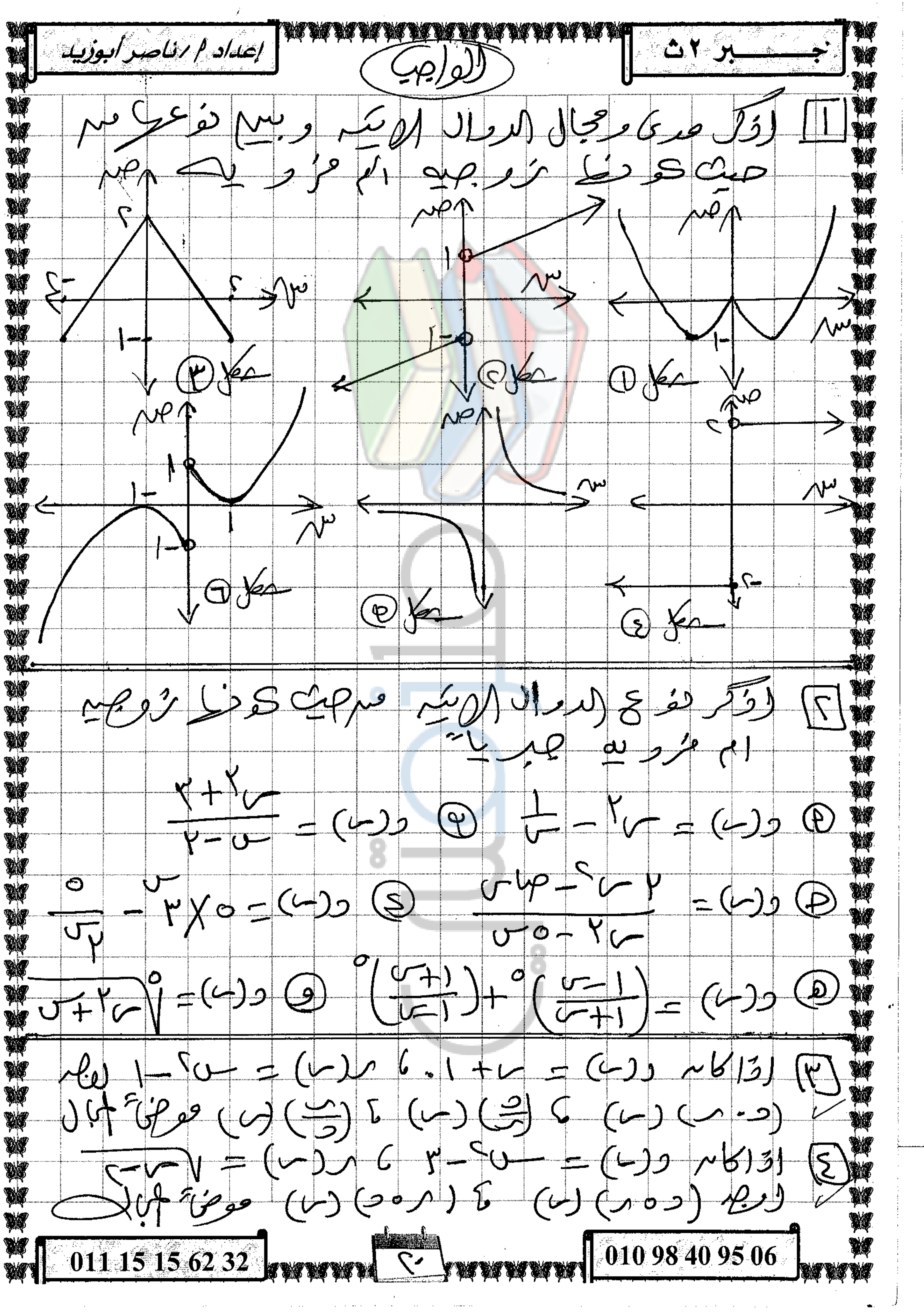
(ب) $د(-س) = \begin{cases} -س - ١ & -س \geq ١ \\ س + ١ & -س < ١ \end{cases} = \begin{cases} -س - ١ & س \leq -١ \\ س + ١ & س > -١ \end{cases}$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

(ج) $د(-س) = \left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^2 - \left(\frac{١ - س}{١ + س}\right)^2$

$= -\left[\left(\frac{١ - س}{١ + س}\right)^2 - \left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^2\right]$

$\therefore د(-س) = -د(س)$ ∴ الدالة فردية



الدوال

إعداد أ/ ناصر أبوزيد

١) اذكر مدى ومجال الدوال الآتية وبين نوع كل منها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك

٢) اذكر نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك

أ) $د(س) = س^{٢} - \frac{١}{س}$ ب) $د(س) = \frac{س^{٢} + ٣}{س - ٢}$

ج) $د(س) = \frac{٢س^{٢} - ٤س}{س^{٢} - ٥س}$ د) $د(س) = ٥ \times ٣^{س} - \frac{٥}{٣^{س}}$

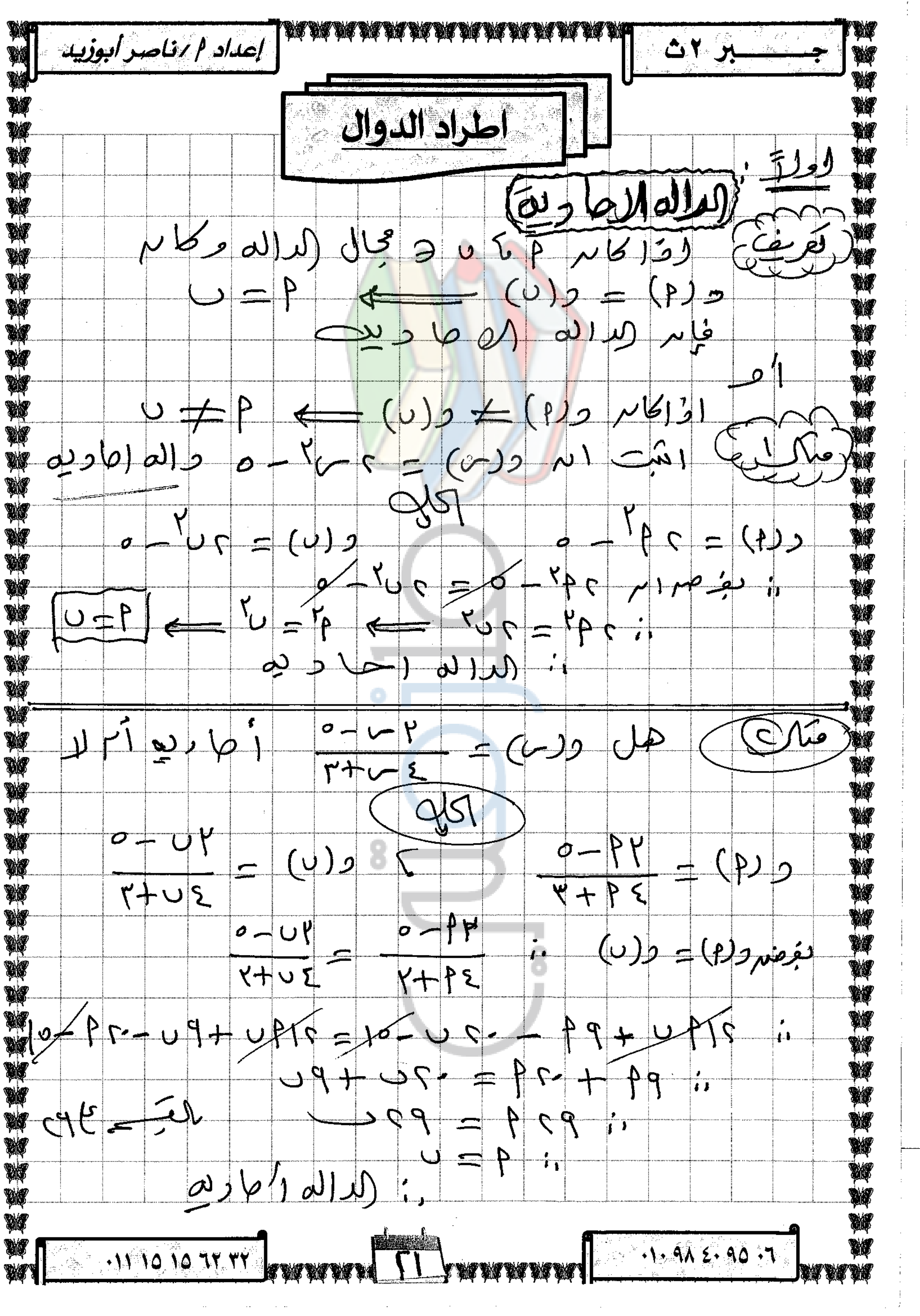
هـ) $د(س) = \left(\frac{١ - س}{١ + س}\right)^{٥} + \left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{٥}$ و) $د(س) = \sqrt[٥]{س^{٢} + س}$

٣) إذا كان $د(س) = س + ١$ ، $ر(س) = س^{٢} - ١$ أوجد $(د \cdot ر)(س)$ ، $(\frac{د}{ر})(س)$ ، $(\frac{ر}{د})(س)$ موضحاً المجال

٤) إذا كان $د(س) = س^{٢} - ٣$ ، $ر(س) = \sqrt{س - ٢}$ أوجد $(د \circ ر)(س)$ ، $(ر \circ د)(س)$ موضحاً المجال

011 15 15 62 32

010 98 40 95 06



اطراد الدوال

أولاً: الدالة الأحادية

تعريف: إذا كان أ ، ب ∈ مجال الدالة وكان

د(أ) = د(ب) ⟸ أ = ب

فإن الدالة أحادية

أو

إذا كان د(أ) ≠ د(ب) ⟸ أ ≠ ب

مثال ١: أثبت أن د(س) = ٢س^٢ − ٥ دالة أحادية

الحل

د(أ) = ٢أ^٢ − ٥ ، د(ب) = ٢ب^٢ − ٥

∵ بفرض أن ٢أ^٢ − ٥ = ٢ب^٢ − ٥

∴ ٢أ^٢ = ٢ب^٢ ⟸ أ^٢ = ب^٢ ⟸ أ = ب

∴ الدالة أحادية

مثال ٢: هل د(س) = (٢س − ٥) / (٤س + ٣) أحادية أم لا

الحل

د(أ) = (٢أ − ٥) / (٤أ + ٣) ، د(ب) = (٢ب − ٥) / (٤ب + ٣)

بفرض د(أ) = د(ب) ∴ (٢أ − ٥) / (٤أ + ٢) = (٢ب − ٥) / (٤ب + ٢)

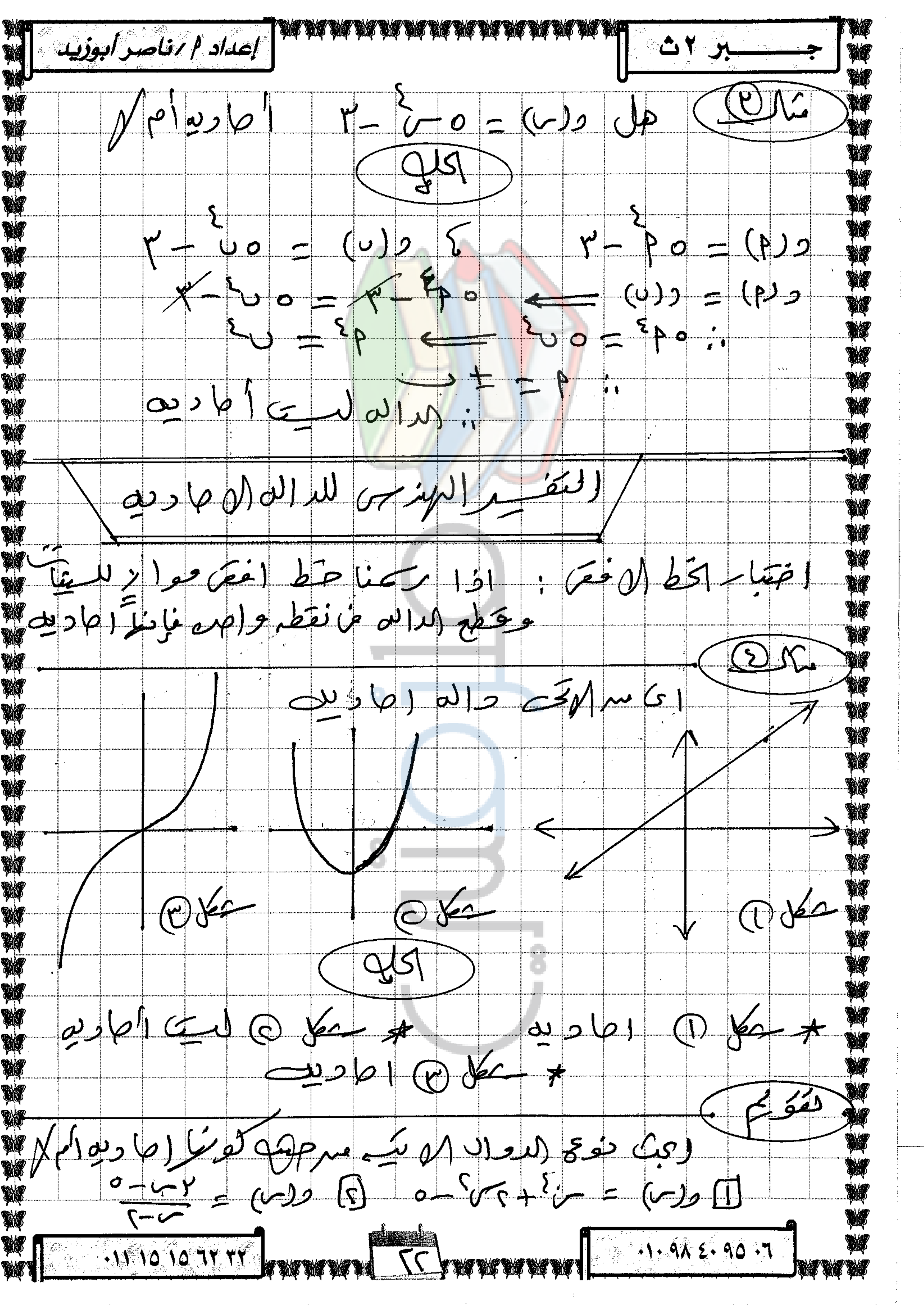
∴ ١٢أب + ٩أ − ٢٠ب − ١٥ = ١٢أب + ٩ب − ٢٠أ − ١٥

∴ ٩أ + ٢٠أ = ٢٠ب + ٩ب

∴ ٢٩أ = ٢٩ب   بالقسمة على ٢٩

∴ أ = ب

∴ الدالة أحادية



مثال ② هل د(س) = ٥ س^{٤} − ٣ أحادية أم لا

الحل

د(أ) = ٥ أ^{٤} − ٣ ، د(ب) = ٥ ب^{٤} − ٣

د(أ) = د(ب) ⟸ ٥ أ^{٤} − ٣ = ٥ ب^{٤} − ٣

∴ ٥ أ^{٤} = ٥ ب^{٤} ⟸ أ^{٤} = ب^{٤}

∴ أ = ± ب

∴ الدالة ليست أحادية

التفسير الهندسي للدالة الأحادية

اختبار الخط الأفقي: إذا رسمنا خط أفقي موازٍ لمحور السينات وقطع الدالة في نقطة واحدة فإنها أحادية

مثال ④ أي مما يأتي دالة أحادية

شكل ① شكل ② شكل ③

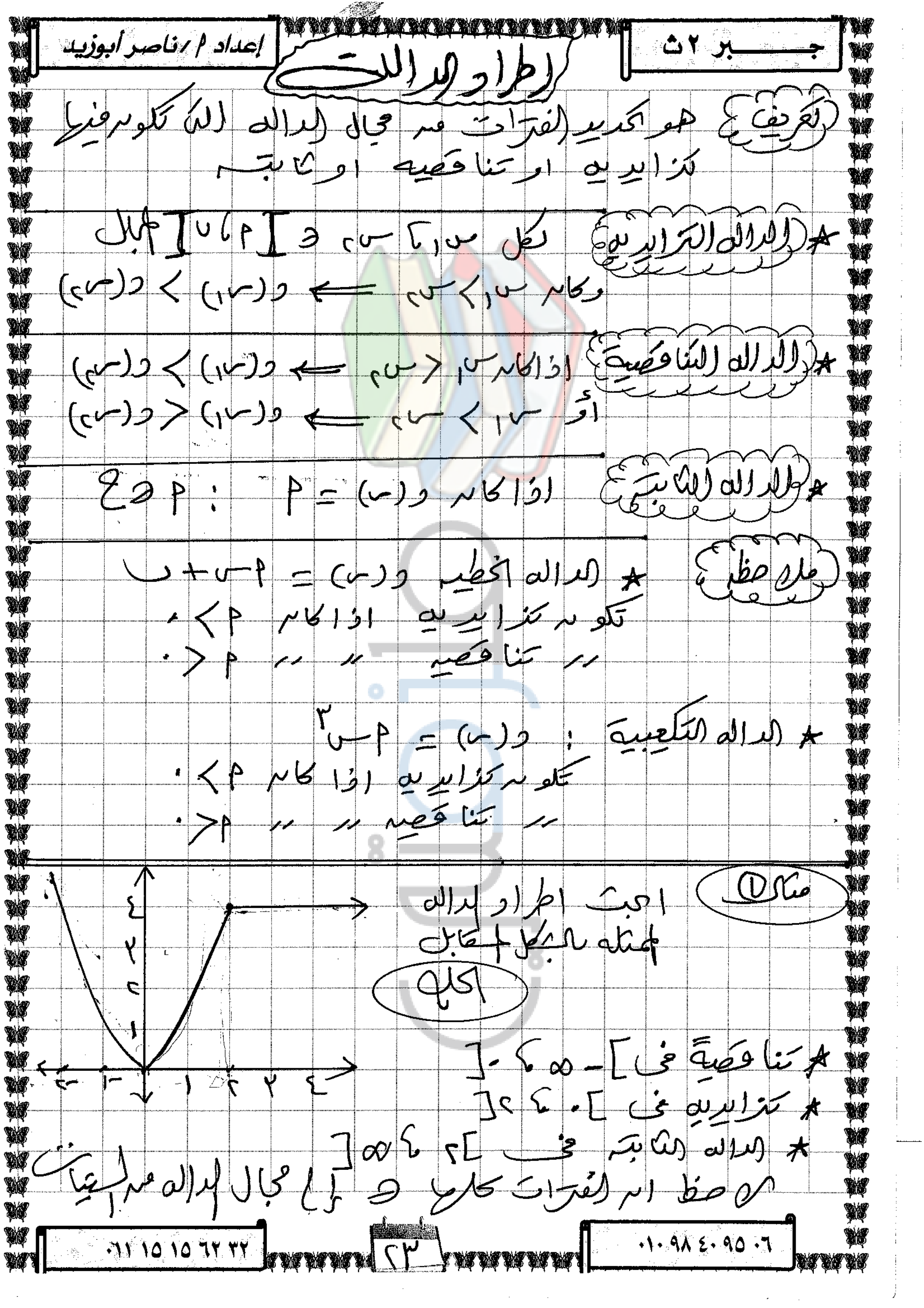
الحل

* شكل ① أحادية * شكل ② ليست أحادية
* شكل ③ أحادية

التقويم

ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها أحادية أم لا

① د(س) = س^{٤} + ٢س^{٢} − ٥ ② د(س) = $\frac{٢س − ٥}{س − ٢}$



إطراد الدالة

إعداد أ / ناصر ابوزيد

تعريف: هو تحديد الفترات من مجال الدالة التي تكون فيها تزايدية او تناقصية او ثابتة

* **الدالة التزايدية:** لكل س١ ، س٢ ∈]أ ، ب[المجال
وكان س١ > س٢ ⟸ د(س١) > د(س٢)

* **الدالة التناقصية:** اذا كان س١ < س٢ ⟸ د(س١) > د(س٢)
أو س١ > س٢ ⟸ د(س١) < د(س٢)

* **الدالة الثابتة:** اذا كان د(س) = أ : أ ∈ ح

ملاحظة:

* الدالة الخطية د(س) = أس + ب
تكون تزايدية اذا كان أ > ٠ ،
″ تناقصية ″ ″ أ < ٠

* الدالة التكعيبية : د(س) = أس^3
تكون تزايدية اذا كان أ > ٠ ،
″ تناقصية ″ ″ أ < ٠

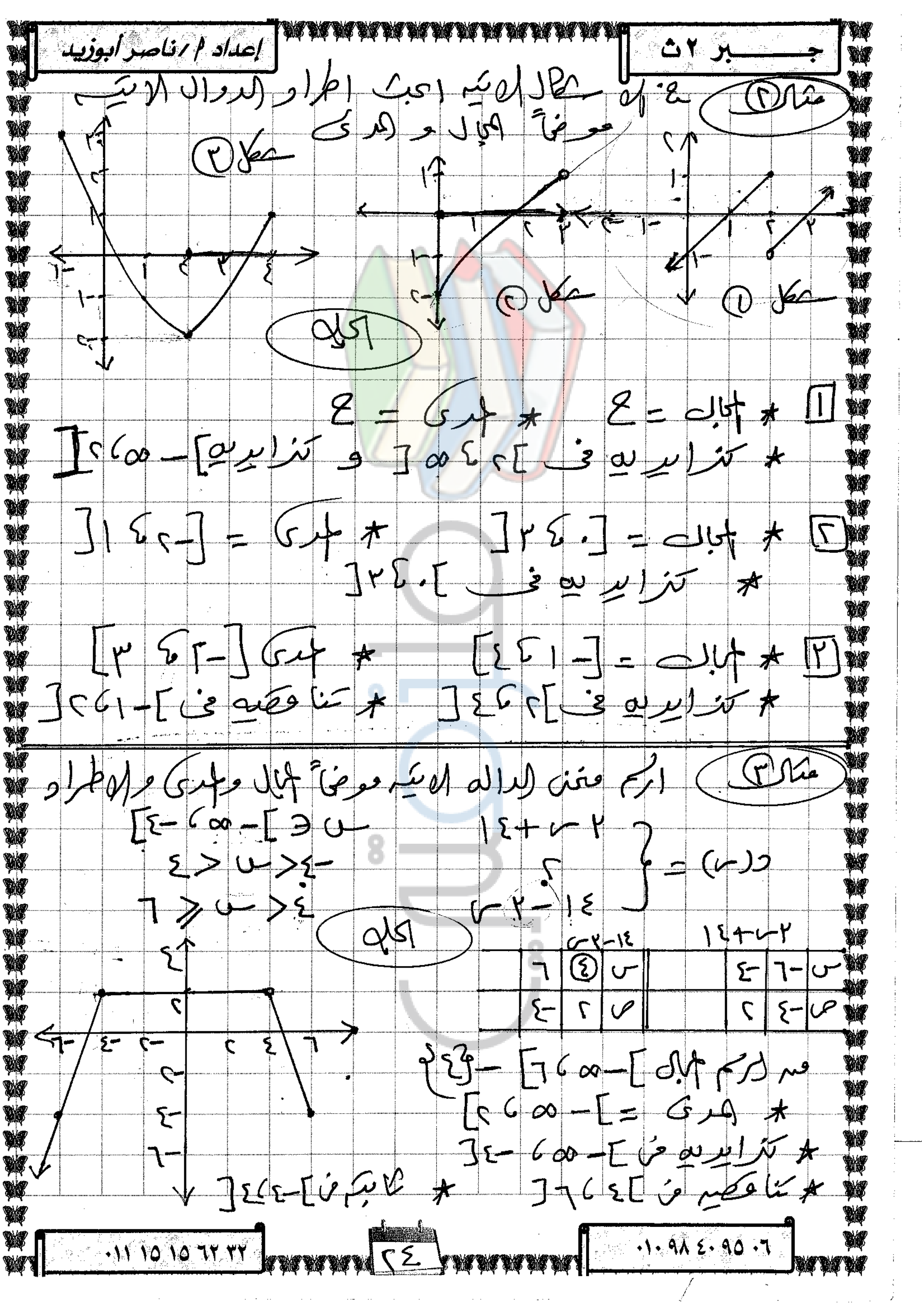
مثال ① ابحث اطراد الدالة الممثلة بالشكل المقابل

الحل

* تناقصية في]-∞ ، ٠[
* تزايدية في]٠ ، ٢[
* الدالة الثابتة في]٢ ، ∞[

لاحظ ان الفترات كلها ⊂ مجال الدالة [illegible]

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢



مثال (٢) من الأشكال الآتية ابحث اطراد الدوال الآتية موضحاً المجال والمدى

شكل (١)   شكل (٢)   شكل (٣)

الحل

[1] * المجال = ح   * المدى = ح

* تزايدية في]٢، ∞[و تزايدية في]-∞، ٢]

[2] * المجال = [٠، ٣[* المدى = [-٢، ١[

* تزايدية في]٠، ٣[

[3] * المجال = [-١، ٤]   * المدى [-٣، ٣]

* تزايدية في]٢، ٤[* تناقصية في]-١، ٢[

مثال (٣) ارسم منحنى الدالة الآتية موضحاً المجال والمدى والاطراد

د(س) = { ٢س + ١٤ ، س ∈]-∞، -٤]
  ٢ ، -٤ < س < ٤
  ١٤ - ٢س ، ٤ < س ≤ ٦ }

الحل

٢س + ١٤

س	-٦	-٤
ص	-٤	٢

١٤ - ٢س

س	٤	٦
ص	٢	-٤

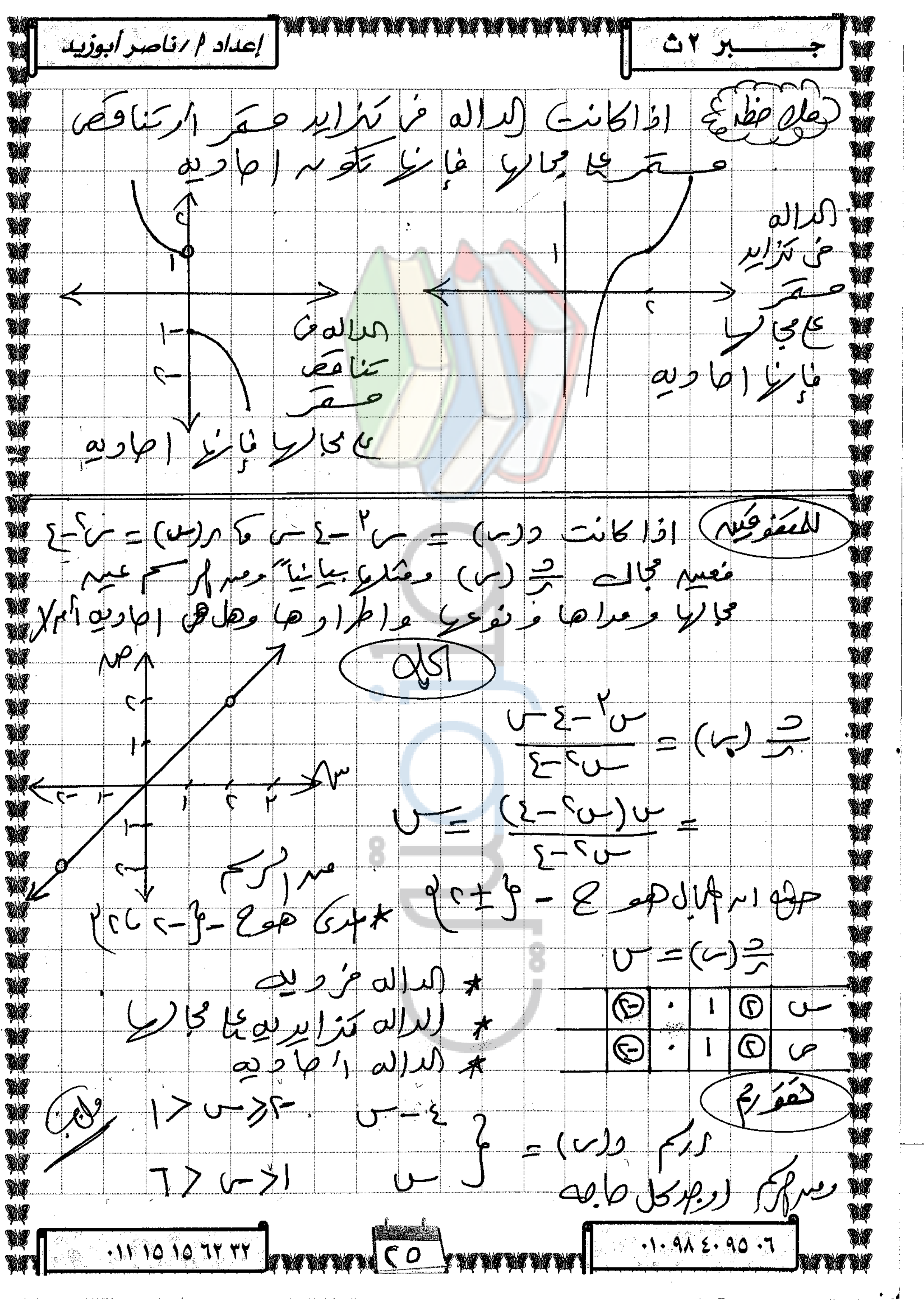
من الرسم المجال]-∞، ٦] - {-٤، ٤}

* المدى =]-∞، ٢]

* تزايدية في]-∞، -٤[

* تناقصية في]٤، ٦[

* ثابتة في]-٤، ٤[



ملاحظة: إذا كانت الدالة د متزايدة مستمر أو تناقص مستمر على مجالها فإنها تكون أحادية

للمتفوقين: إذا كانت د(س) = $س^2 - ٤س$ ، ر(س) = $س^2 - ٤$ فعين مجال $\frac{د}{ر}$(س) ومثلها بيانياً ومن الرسم عين مجالها ومداها ونوعها واطرادها وهل هي أحادية أم لا

الحل

$\frac{د}{ر}(س) = \frac{س^2 - ٤س}{س^2 - ٤}$

$= \frac{س(س^2 - ٤)}{س^2 - ٤} = س$

مجال الدالة هو ح − {±٢}

$\frac{د}{ر}(س) = س$

س	٢	١	٠	-٢
ص	٢	١	٠	-٢

من الرسم

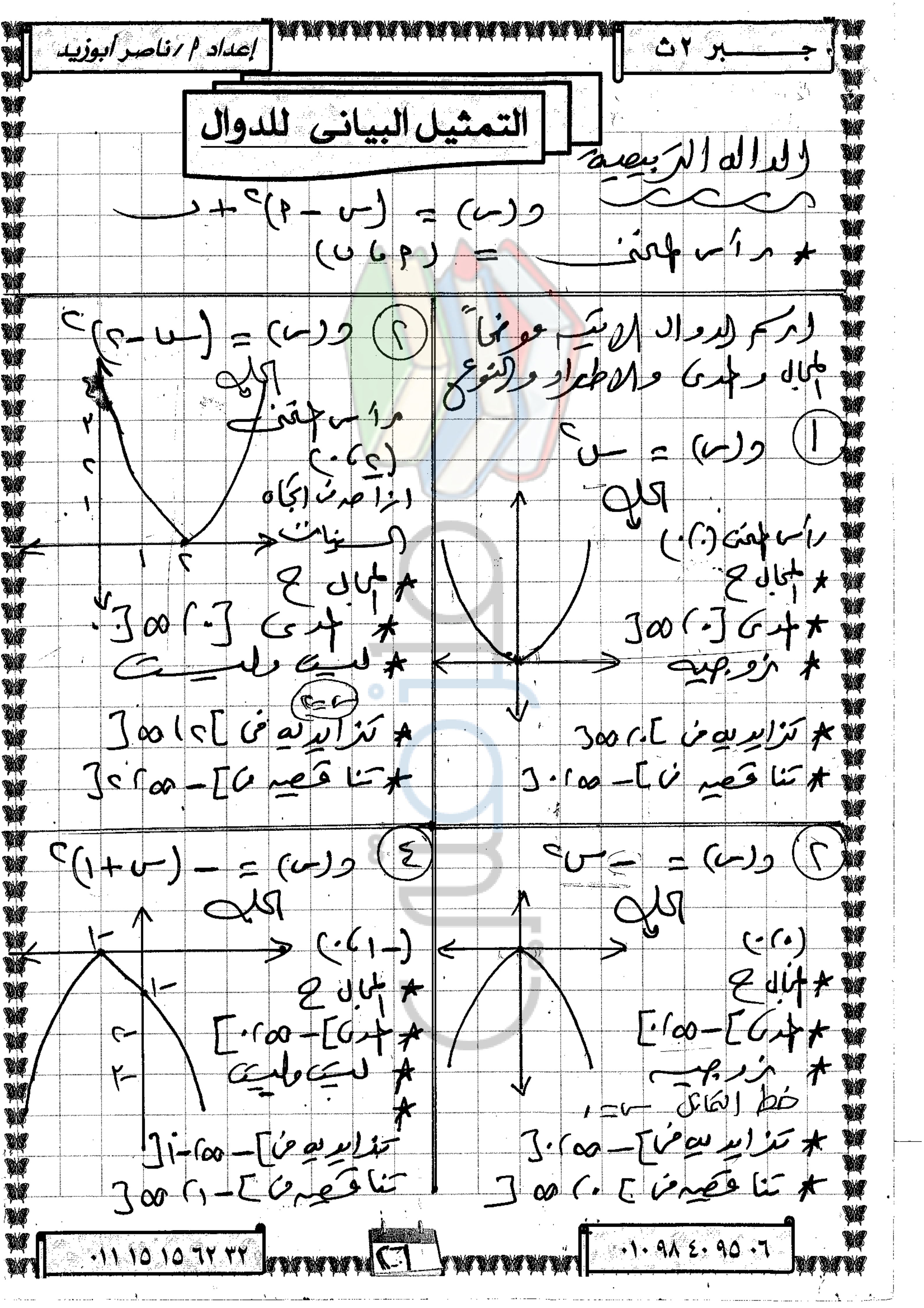
* المدى هو ح − {−٢ ، ٢}
* الدالة فردية
* الدالة تزايدية على مجالها
* الدالة أحادية

تقويم:

ارسم د(س) = { ٤ − س ، $-2 \le س < 1$ ؛ س ، $1 \le س < 6$ }

ومن الرسم أوجد كل ما يلي

واجب



التمثيل البياني للدوال

الدالة التربيعية

د(س) = (س − م)^2 + ن

* رأس المنحنى = (م ، ن)

ارسم الدوال الآتية موضحاً المجال والمدى والاطراد والنوع

(١) د(س) = س^2

الحل

رأس المنحنى (٠ ، ٠)

* المجال ح
* المدى [٠ ، ∞[
* زوجية
* تزايدية في]٠ ، ∞[
* تناقصية في]−∞ ، ٠[

(٢) د(س) = (س − ٢)^2

الحل

رأس المنحنى (٢ ، ٠)

ازاحة ٢ في اتجاه السينات

* المجال ح
* المدى [٠ ، ∞[
* ليست زوجية ولا فردية

(س = ٢)

* تزايدية في]٢ ، ∞[
* تناقصية في]−∞ ، ٢[

(٣) د(س) = −س^2

الحل

(٠ ، ٠)

* المجال ح
* المدى]−∞ ، ٠]
* زوجية

خط التماثل س = ٠

* تزايدية في]−∞ ، ٠[
* تناقصية في]٠ ، ∞[

(٤) د(س) = −(س + ١)^2

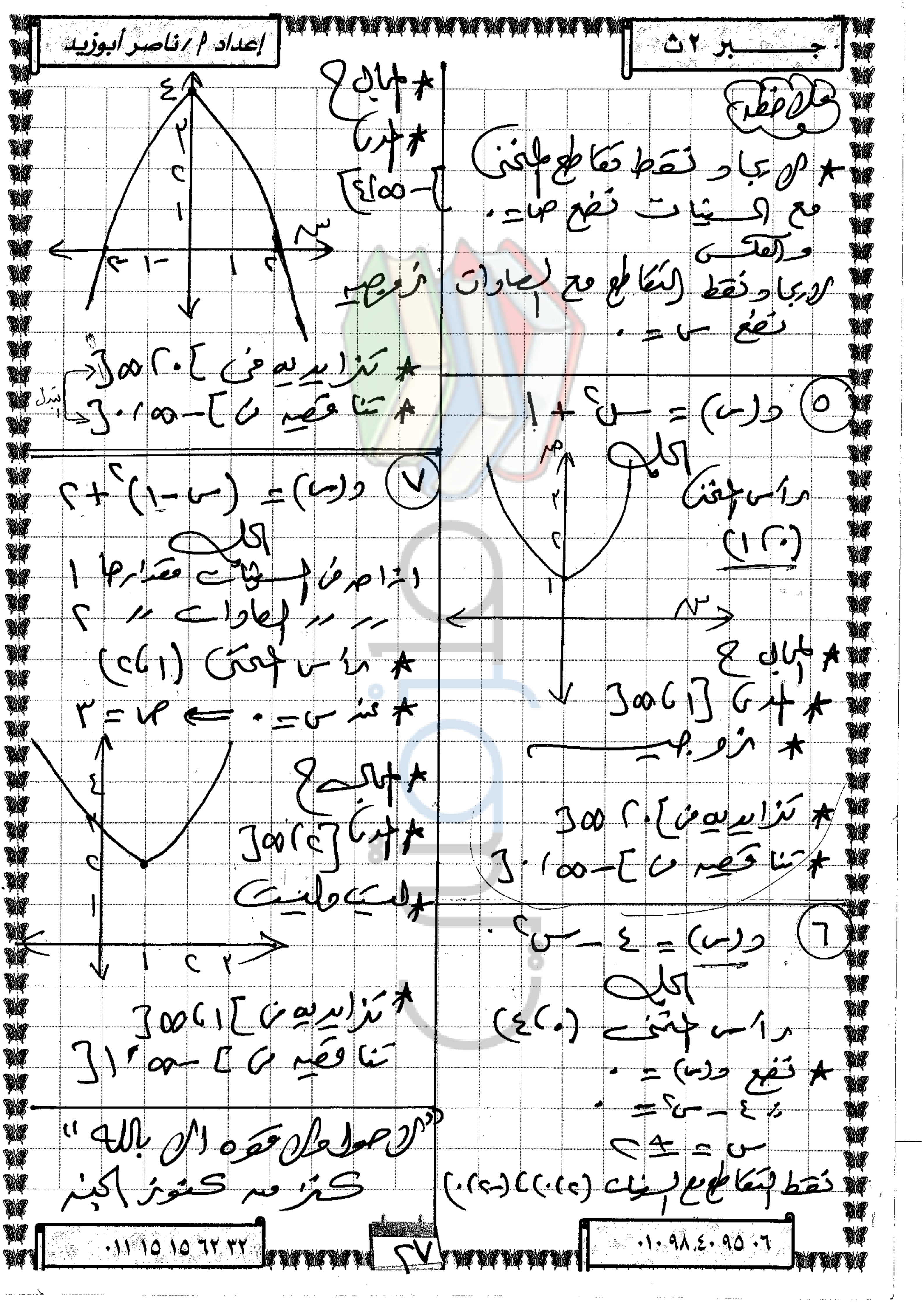
الحل

(−١ ، ٠)

* المجال ح
* المدى]−∞ ، ٠]
* ليست زوجية ولا فردية
*

تزايدية في]−∞ ، −١[

تناقصية في]−١ ، ∞[



ملاحظة

* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع السينات نضع ص = ٠
والعكس
لإيجاد نقط التقاطع مع الصادات نضع س = ٠.

⑤ د(س) = س² + ١

الحل

رأس المنحنى (٠، ١)

* المجال ح
* المدى [١، ∞[
* زوجية
* تزايدية في]٠، ∞[
* تناقصية في]−∞، ٠[

⑥ د(س) = ٤ − س²

الحل

رأس المنحنى (٠، ٤)

* نضع د(س) = ٠
∴ ٤ − س² = ٠
س = ±٢
نقط التقاطع مع السينات (٢، ٠)، (−٢، ٠)

* المجال ح
* المدى]−∞، ٤]

زوجية

* تزايدية في]٠، ∞[
* تناقصية في]−∞، ٠[

(تبدل)

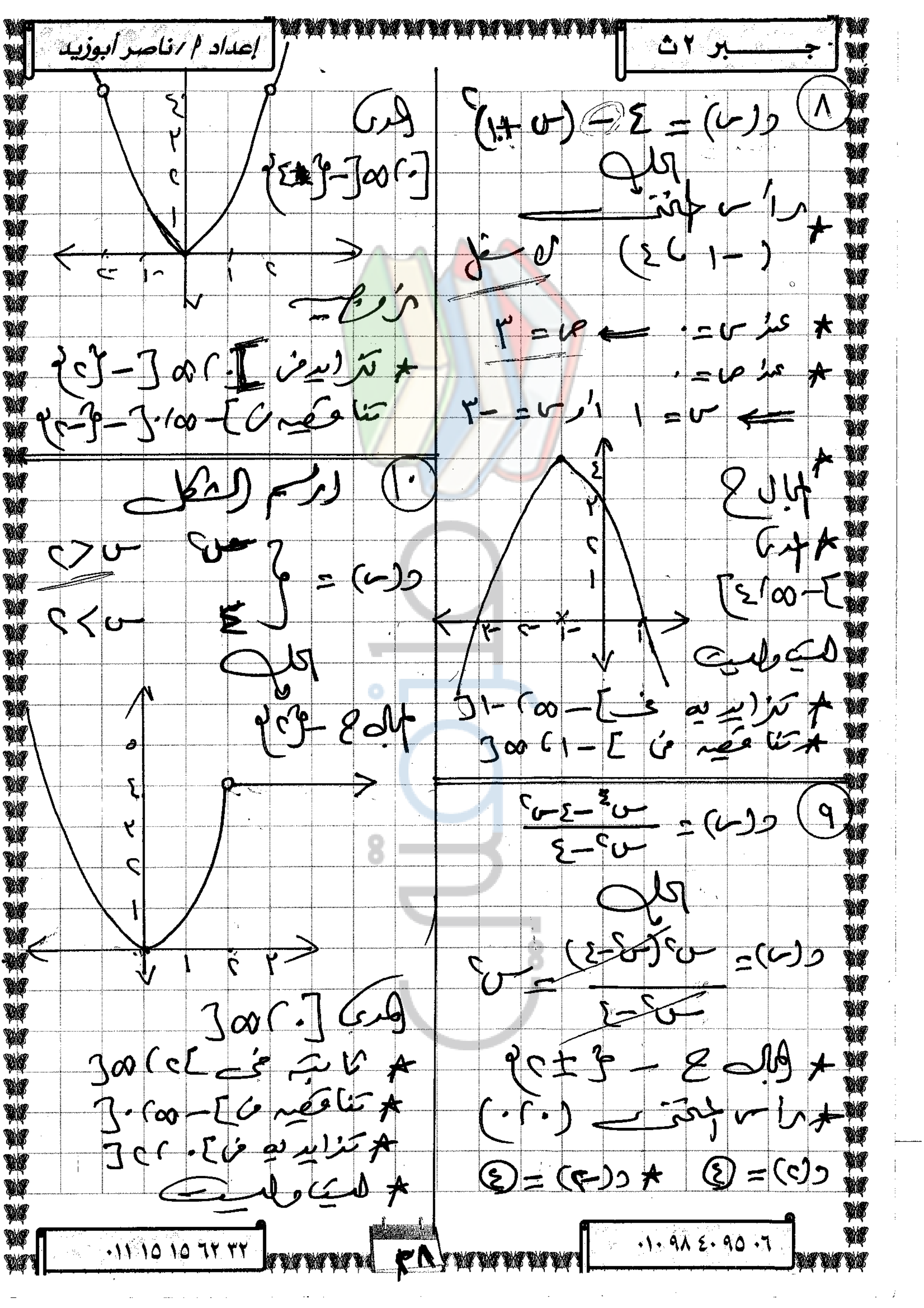
⑦ د(س) = (س − ١)² + ٢

الحل

انزاحة السينات بمقدار ١
" " الصادات " ٢

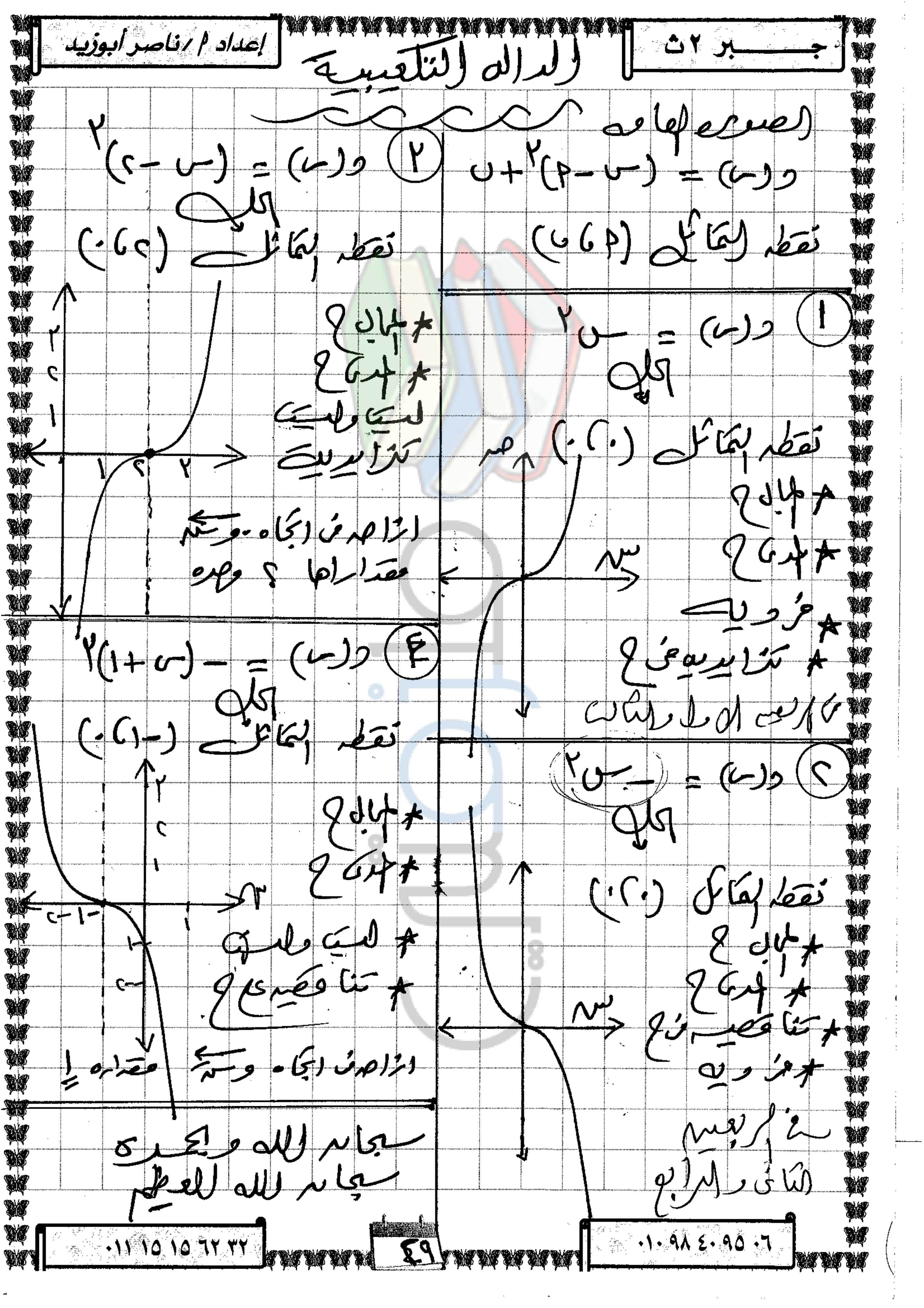
* رأس المنحنى (١، ٢)
* عند س = ٠ ⟸ ص = ٣
* المجال ح
* المدى [٢، ∞[
* ليست زوجية ولا فردية
* تزايدية في]١، ∞[
* تناقصية في]−∞، ١[

"لا حول ولا قوة إلا بالله"
كنز من كنوز الجنة


٨) د(س) = ٤ − (س + ١)^٢
الحل
* رأس المنحنى (−١ ، ٤)
* عند س = ٠ ← ص = ٣
* عند ص = ٠ ← س = ١ أو س = −٣
* المجال ح
* المدى]−∞ ، ٤]
* ليست زوجية ولا فردية
* تزايدية في]−∞ ، −١[
* تناقصية في]−١ ، ∞[
المدى [٠ ، ∞[− {٤}
زوجية
* تزايدية في]٠ ، ∞[− {٢}
تناقصية في]−∞ ، ٠[− {−٢}
٩) د(س) = (س^٤ − ٤س^٢) / (س^٢ − ٤)
الحل
د(س) = س^٢(س^٢ − ٤) / (س^٢ − ٤) = س^٢
* المجال ح − {±٢}
* رأس المنحنى (٠ ، ٠)
د(٢) = ٤ * د(−٢) = ٤
١٠) ارسم الشكل
د(س) = { س^٢ عندما س ≤ ٢ ، ٤ عندما س > ٢ }
الحل
المجال ح
المدى [٠ ، ∞[
* ثابتة في]٢ ، ∞[
* تناقصية في]−∞ ، ٠[
* تزايدية في]٠ ، ٢[
* ليست زوجية ولا فردية

إعداد أ/ ناصر أبوزيد

الدالة التكعيبية



الصورة العامة

د(س) = (س − أ)^٣ + ب

نقطة التماثل (أ ، ب)

① د(س) = س^٣

الحل

نقطة التماثل (٠ ، ٠)

* المجال ح
* المدى ح
* فردية
* تزايدية على ح

تقع في الربعين الأول والثالث

② د(س) = −س^٣

الحل

نقطة التماثل (٠ ، ٠)

* المجال ح
* المدى ح
* تناقصية على ح
* فردية

تقع في الربعين الثاني والرابع

③ د(س) = (س − ٢)^٣

الحل

نقطة التماثل (٢ ، ٠)

* المجال ح
* المدى ح

ليست فردية ولا زوجية

تزايدية

انزاحت في اتجاه و س← بمقدار ٢ وحدة

④ د(س) = −(س + ١)^٣

الحل

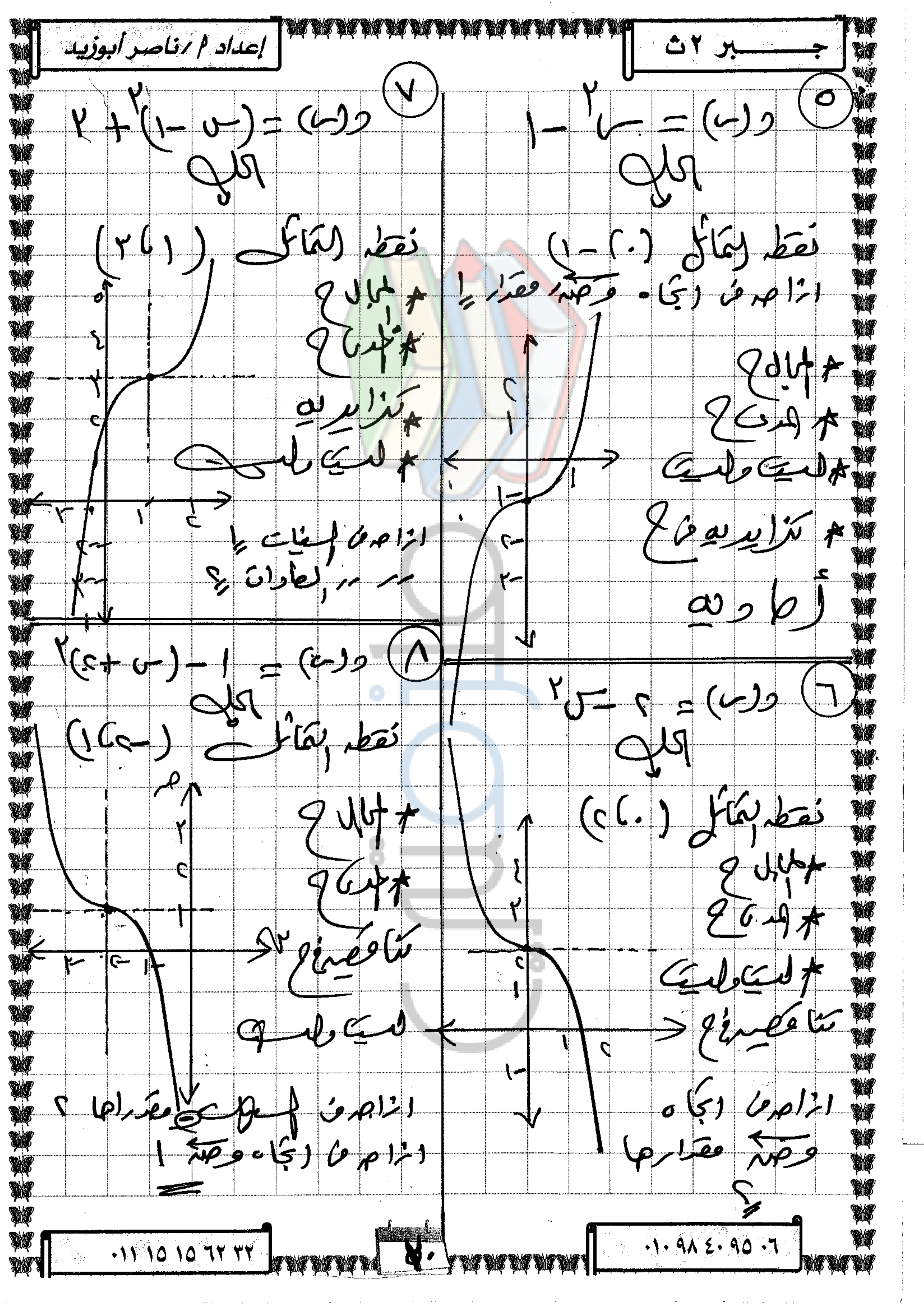
نقطة التماثل (−١ ، ٠)

* المجال ح
* المدى ح
* ليست فردية ولا زوجية
* تناقصية على ح

انزاحت في اتجاه و س← بمقدار ١

سبحان الله وبحمده سبحان الله العظيم

٠١١١٥١٥٦٢٣٢ — ٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



٥

$د(س) = س^3 - ١$

الحل

نقطة التماثل (٠، −١)

انزاحة في اتجاه ↓ وحدة مقدارها ١

* المجال ح
* المدى ح
* ليست زوجية وليست فردية
* تزايدية على ح

أحادية

٦

$د(س) = ٢ - س^3$

الحل

نقطة التماثل (٠، ٢)

* المجال ح
* المدى ح
* ليست زوجية وليست فردية

تناقصية على ح

انزاحة في اتجاه ↑ وحدة مقدارها ٢

٧

$د(س) = (س - ١)^3 + ٢$

الحل

نقطة التماثل (١، ٢)

* المجال ح
* المدى ح
* تزايدية
* ليست زوجية وليست فردية

انزاحة السينات ١ →

انزاحة الصادات ٢ ↑

٨

$د(س) = ١ - (س + ٢)^3$

الحل

نقطة التماثل (−٢، ١)

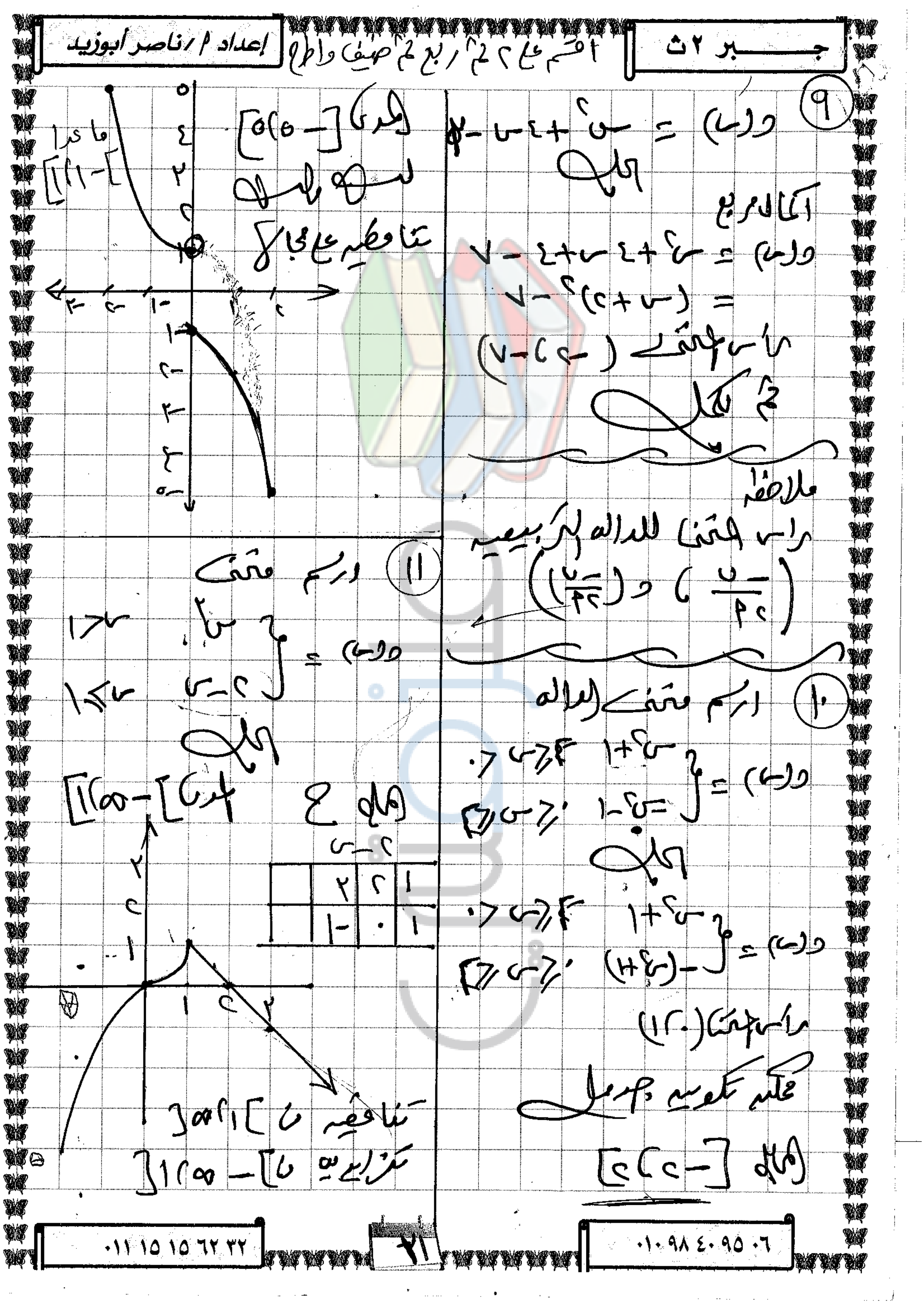
* المجال ح
* المدى ح

تناقصية على ح

ليست زوجية وليست فردية

انزاحة في السينات ← مقدارها ٢

انزاحة في اتجاه ↑ وحدة ١



(٩) $د(س) = س^2 + ٤س - ٣$

الحل

إكمال المربع

$د(س) = س^2 + ٤س + ٤ - ٧$

$= (س + ٢)^2 - ٧$

رأس المنحنى $(-٢ ، -٧)$

ثم نكمل

ملاحظة

رأس المنحنى للدالة التربيعية $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

(١٠) ارسم منحنى الدالة

$د(س) = \begin{cases} س^2 + ١ & س \geq ٠ \\ ... & س \in [-٢ ، ٠[\end{cases}$

الحل

رأس المنحنى $(٠ ، ١)$

نكمل بالرسم

المدى $[-٥ ، ٥]$

متناقصة على مجالها

المدى $]-١ ، ١]$

(١١) ارسم منحنى

$د(س) = \begin{cases} س^2 & س < ١ \\ ٢ - س & س \geq ١ \end{cases}$

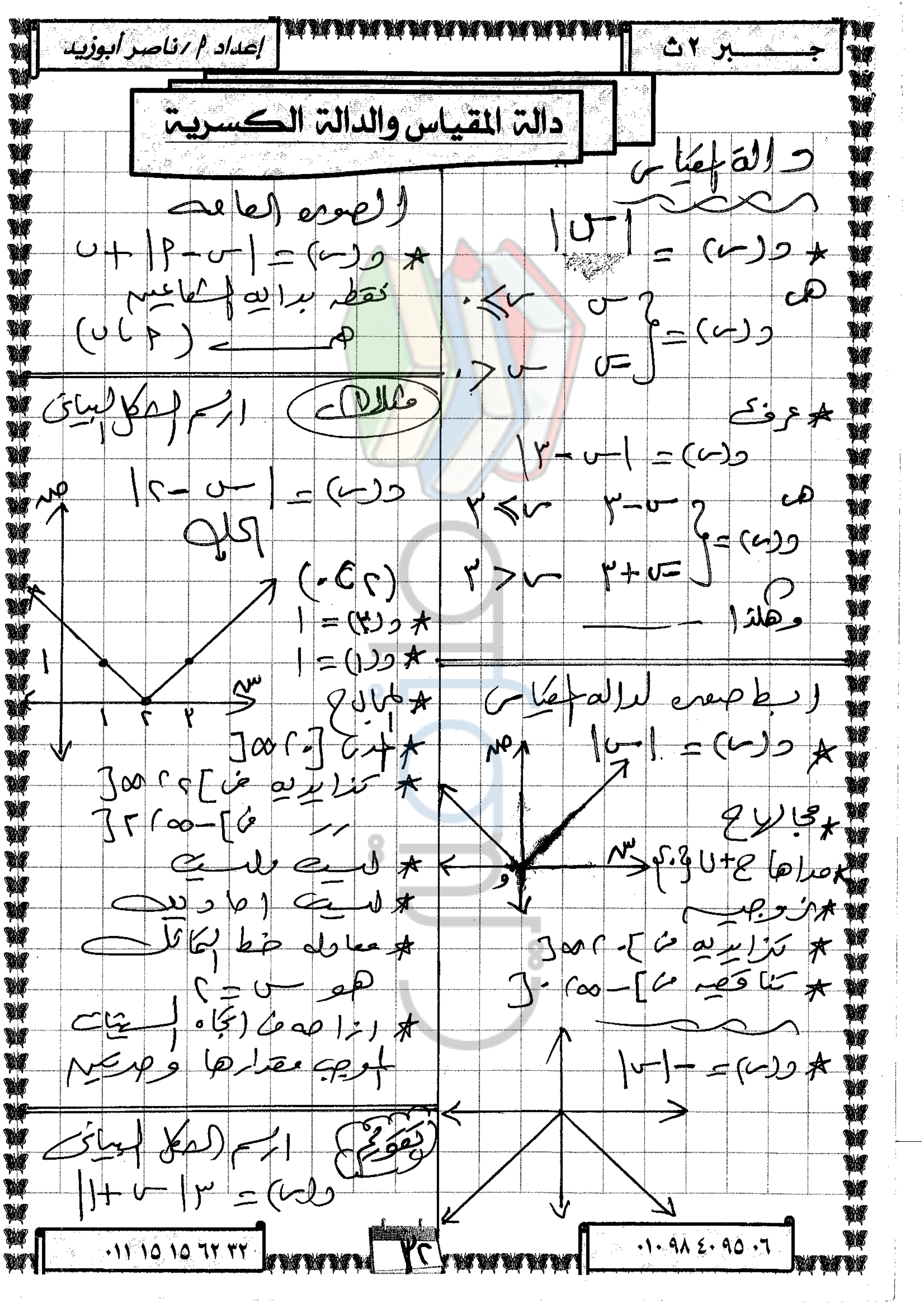
الحل

المدى $]-\infty ، ١]$

س	١	٢	٣
ص	١	٠	−١

متناقصة على $]١ ، \infty[$

تزايدية على $]-\infty ، ١[$



دالة المقياس والدالة الكسرية

دالة المقياس

* $د(س) = |س|$

$$د(س) = \begin{cases} س & س \geq ٠ \\ -س & س < ٠ \end{cases}$$

* عرفي

$د(س) = |س - ٣|$

$$د(س) = \begin{cases} س - ٣ & س \geq ٣ \\ -س + ٣ & س < ٣ \end{cases}$$

وهكذا ...

الصورة العامة

* $د(س) = |س - أ| + ب$

نقطة بداية الشعاعين هي (أ، ب)

مثال (١) ارسم الشكل البياني

$د(س) = |س - ٢|$

الحل

(٢، ٠)

* د(٣) = ١
* د(١) = ١
* المجال ح
* المدى [٠، ∞[
* تزايدية في]٢، ∞[
* تناقصية في]-∞، ٢[
* ليست فردية
* ليست زوجية
* معادلة خط التماثل هي س = ٢
* ازاحة في اتجاه السينات الموجب مقدارها وحدتين

ابسط صورة لدالة المقياس

* $د(س) = |س|$

* مجالها ح
* مداها ح+ ∪ {٠}
* زوجية
* تزايدية في]٠، ∞[
* تناقصية في]-∞، ٠[

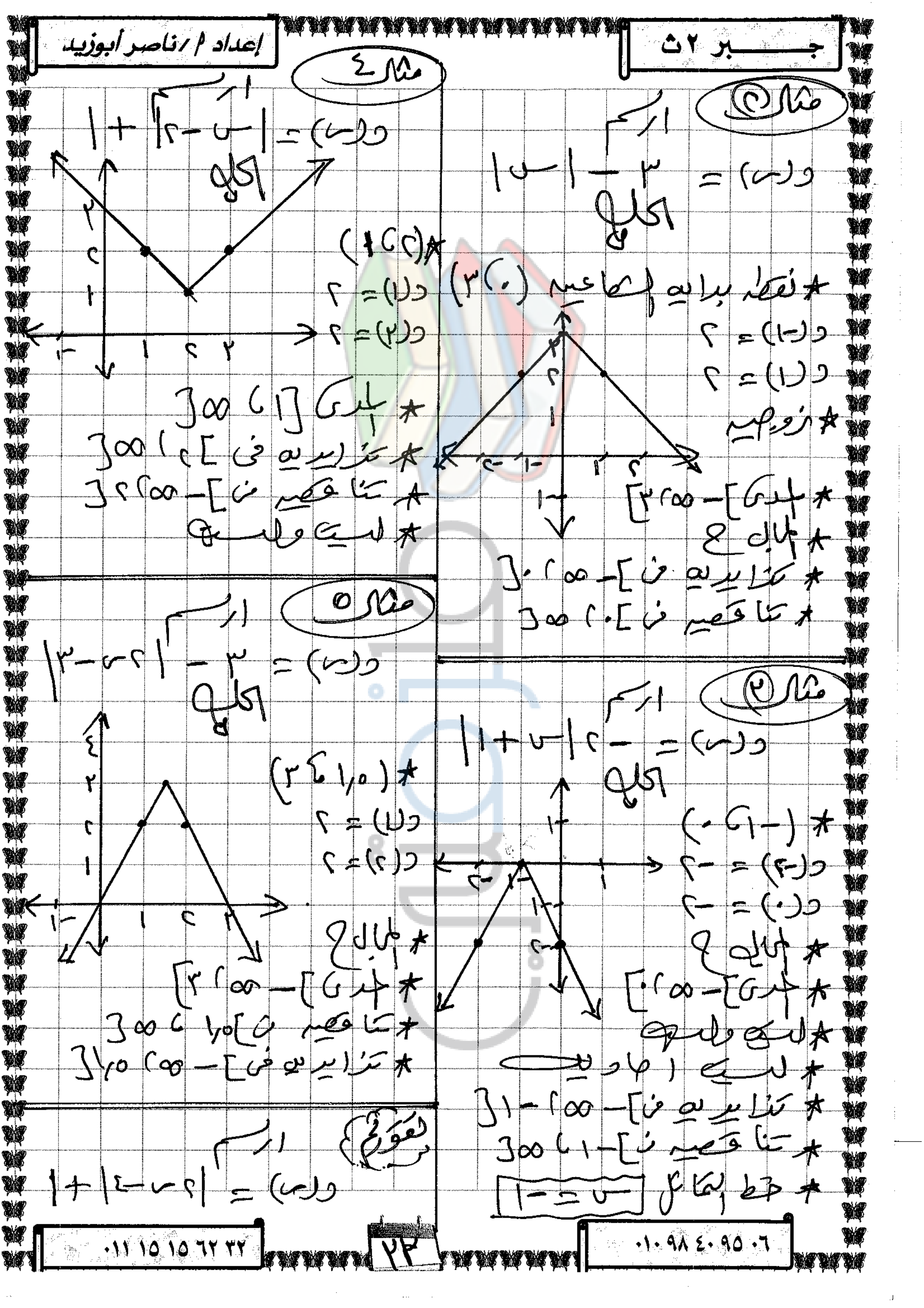
* $د(س) = -|س|$

تقويم

ارسم الشكل البياني $د(س) = ٣ - |س + ١|$

٠١١١٥١٥٦٢٣٢

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

مثال ③

ارسم $د(س) = ٣ - |س - ١|$

الحل

* نقطة بداية الشعاع (٠ ، ٣)

د(−١) = ٢

د(١) = ٢

* زوجية
* المدى]−∞ ، ٣]
* المجال ح
* تزايدية في]−∞ ، ٠[
* تناقصية في]٠ ، ∞[

مثال ②

ارسم $د(س) = -٢|س + ١|$

الحل

* (−١ ، ٠)

د(−٢) = −٢

د(٠) = −٢

* المجال ح
* المدى]−∞ ، ٠]
* ليست زوجية
* ليست فردية
* تزايدية في]−∞ ، −١[
* تناقصية في]−١ ، ∞[
* خط التماثل س = −١

مثال ٤

ارسم $د(س) = |س - ٢| + ١$

الحل

* (٢ ، ١)

د(١) = ٢

د(٣) = ٢

* المدى [١ ، ∞[
* تزايدية في]٢ ، ∞[
* تناقصية في]−∞ ، ٢[
* ليست زوجية وليست فردية

مثال ٥

ارسم $د(س) = ٣ - |٢س - ٣|$

الحل

* (١٫٥ ، ٣)

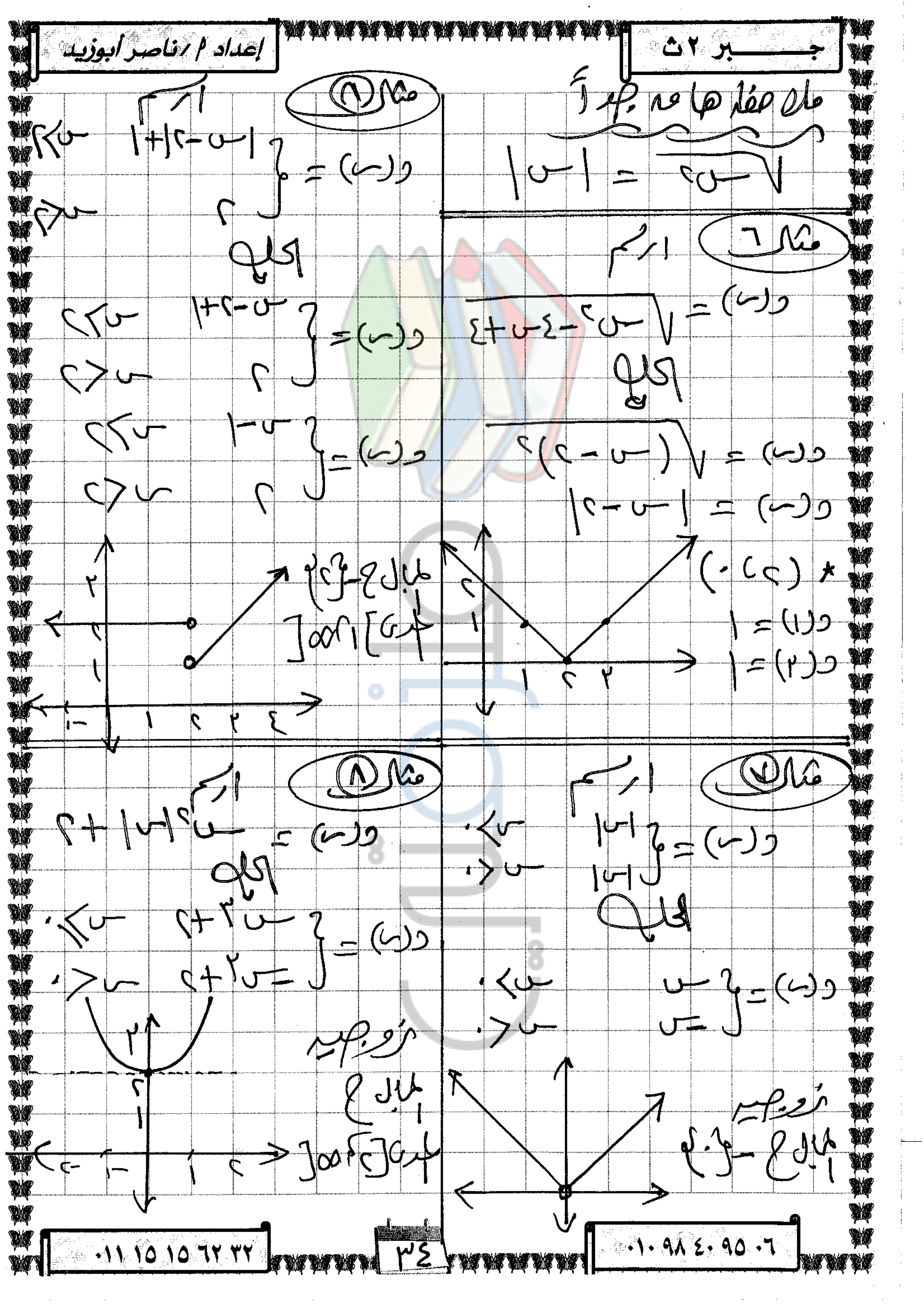
د(١) = ٢

د(٢) = ٢

* المجال ح
* المدى]−∞ ، ٣]
* تناقصية في]١٫٥ ، ∞[
* تزايدية في]−∞ ، ١٫٥[

تقويم

ارسم $د(س) = |٢س - ٤| + ١$



ملاحظة هامة جداً
$\sqrt{س^٢} = |س|$

مثال ٦
ارسم
$د(س) = \sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}$
الحل
$د(س) = \sqrt{(س - ٢)^٢}$
$د(س) = |س - ٢|$
* (٢ ، ٠)
د(١) = ١
د(٣) = ١

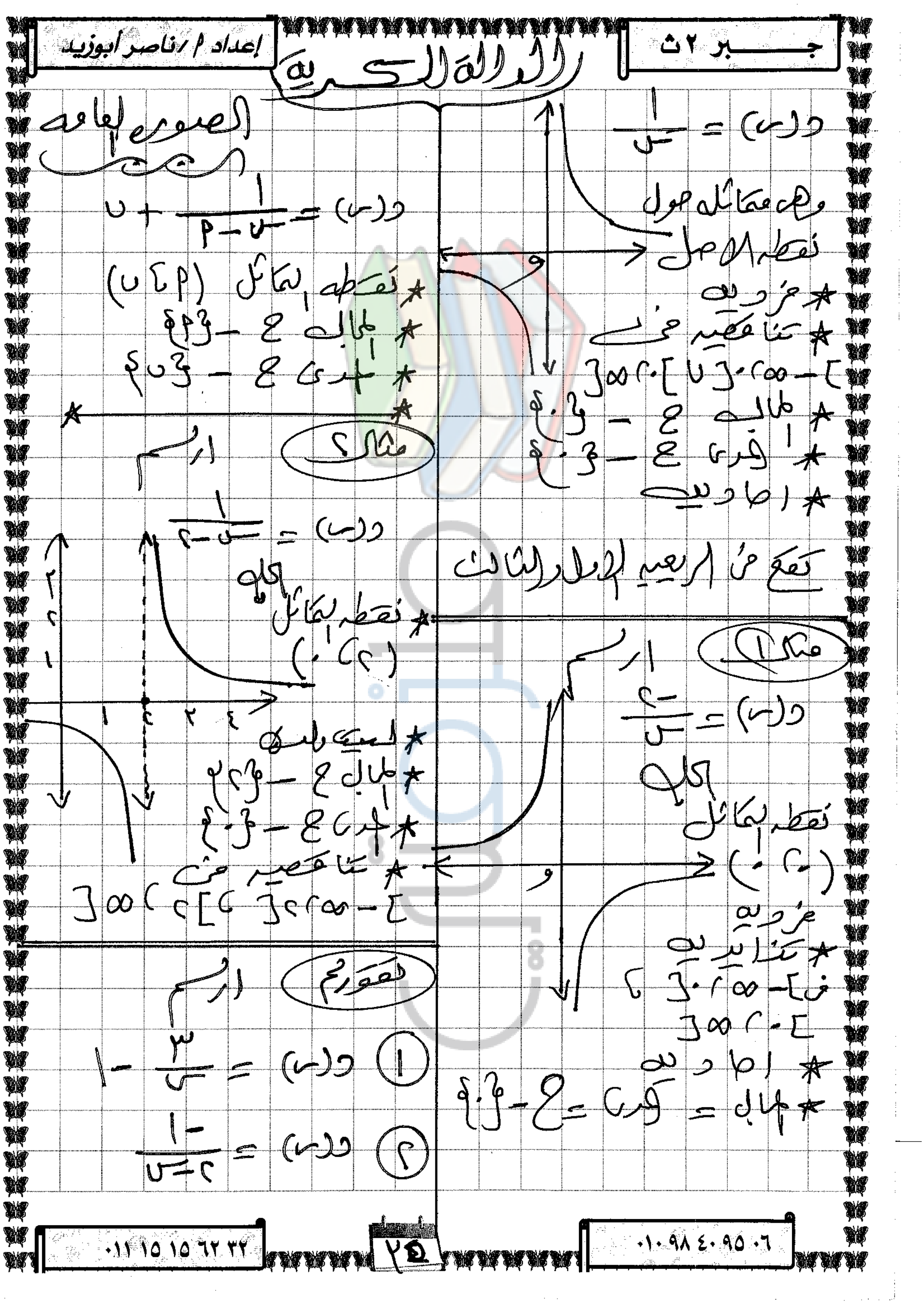
مثال ٧
ارسم
$د(س) = \begin{cases} |س| & س > ٠ \\ |س| & س < ٠ \end{cases}$
الحل
$د(س) = \begin{cases} س & س > ٠ \\ -س & س < ٠ \end{cases}$
نروح صيد
المدى ح^+ ∪ {٠}

مثال ٩
ارسم
$د(س) = \begin{cases} |س - ٢| + ١ & س \geq ٢ \\ ٢ & س < ٢ \end{cases}$
الحل
$د(س) = \begin{cases} س - ٢ + ١ & س \geq ٢ \\ ٢ & س < ٢ \end{cases}$
$د(س) = \begin{cases} س - ١ & س \geq ٢ \\ ٢ & س < ٢ \end{cases}$
المجال ح - {٢}
المدى]١ ، ∞[

مثال ٨
ارسم
$د(س) = س^٢ |س| + ٢$
الحل
$د(س) = \begin{cases} س^٣ + ٢ & س \geq ٠ \\ -س^٣ + ٢ & س < ٠ \end{cases}$
نروح صيد
المجال ح
المدى]٢ ، ∞[

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦
٠١١١٥١٥٦٢٣٢

إعداد م / ناصر أبوزيد



الدالة الكسرية

$د(س) = \frac{1}{س}$

وهي متماثلة حول نقطة الأصل

* فردية
* تناقصية في $]-\infty ، ٠[$ ، $]٠ ، \infty[$
* المجال ح − {٠}
* المدى ح − {٠}
* أحادية

تقع في الربعين الأول والثالث

مثال ١ ارسم $د(س) = \frac{-٢}{س}$

الحل

نقطة التماثل (٠ ، ٠)

* فردية
* تزايدية في $]-\infty ، ٠[$ ، $]٠ ، \infty[$
* أحادية
* المجال = المدى = ح − {٠}

الصورة العامة

$د(س) = \frac{1}{س - أ} + ب$

* نقطة التماثل (أ ، ب)
* المجال ح − {أ}
* المدى ح − {ب}

مثال ٢ ارسم $د(س) = \frac{1}{س - ٢}$

الحل

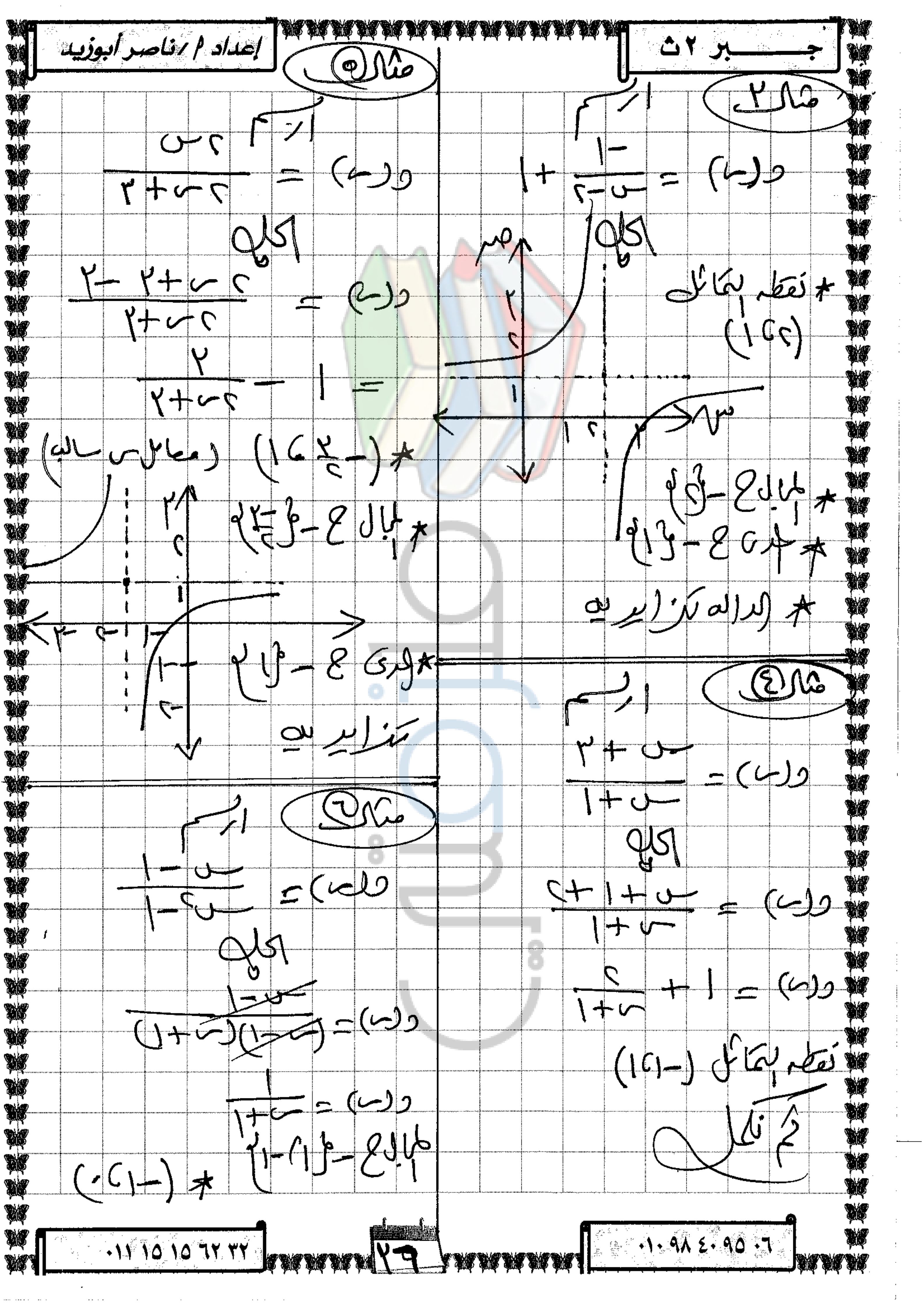
* نقطة التماثل (٢ ، ٠)
* ليست فردية
* المجال ح − {٢}
* المدى ح − {٠}
* تناقصية في $]-\infty ، ٢[$ ، $]٢ ، \infty[$

تمارين ارسم

١) $د(س) = \frac{٣}{س} - ١$

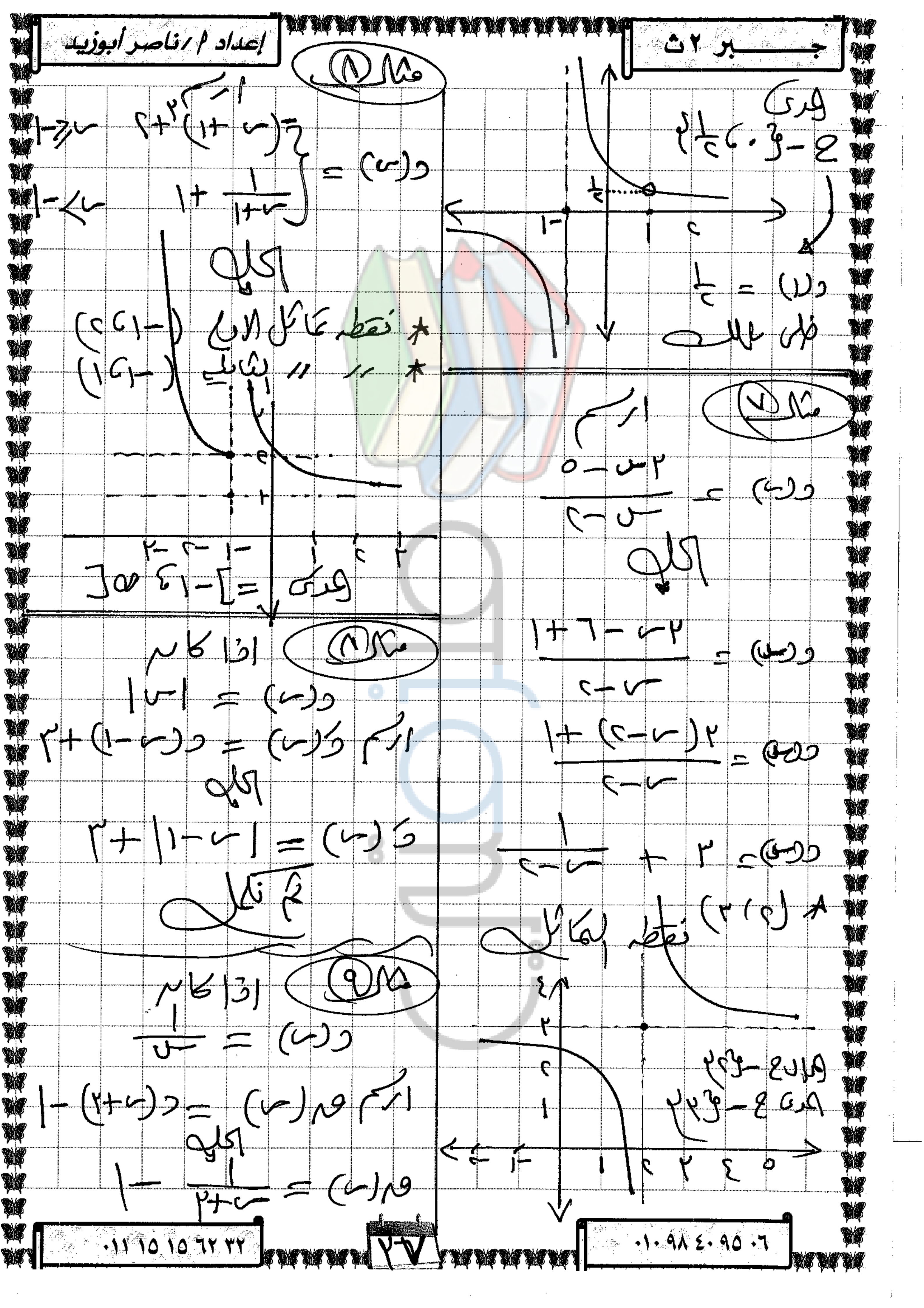
٢) $د(س) = \frac{-١}{٢ - س}$

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦
٠١١١٥١٥٦٢٣٢



إعداد أ / ناصر أبوزيد
جبر ٢ ث
مثال ٢
ارسم
د(س) = -١ / (س - ٢) + ١
الحل
* نقطة التماثل (٢ ، ١)
* المجال ح - {٢}
* المدى ح - {١}
* الدالة تزايدية
مثال ٣
ارسم
د(س) = ٢س / (٢س + ٣)
الحل
د(س) = (٢س + ٣ - ٣) / (٢س + ٣)
= ١ - ٣ / (٢س + ٣)
* (-٣/٢ ، ١) (معامل س سالب)
* المجال ح - {-٣/٢}
* المدى ح - {١}
تزايدية
مثال ٤
ارسم
د(س) = (س + ٣) / (س + ١)
الحل
د(س) = (س + ١ + ٢) / (س + ١)
د(س) = ١ + ٢ / (س + ١)
نقطة التماثل (-١ ، ١)
تم
مثال ٥
ارسم
د(س) = (س - ١) / (س٢ - ١)
الحل
د(س) = (س - ١) / ((س - ١)(س + ١))
د(س) = ١ / (س + ١)
المجال ح - {١ ، -١}
* (-١ ، ٠)
٠١١ ١٥ ١٥ ٦٢ ٣٢
٢٦
٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦

إعداد أ / ناصر أبوزيد



المدى $]-\infty, 0[\cup [\frac{1}{2}, \infty[$

د(١) = $\frac{1}{2}$

ظل بلاط

مثال ⑥

$$د(س) = \begin{cases} (س + ١)^{٢} + ٢ & س \leq -١ \\ \frac{1}{س+1} + 1 & س > -١ \end{cases}$$

الحل

* نقطة تماثل الأول $(-١ ، ٢)$
* " " الثاني $(-١ ، ١)$

المدى $= [-١ ، \infty[$

مثال ⑦

ارسم

$$د(س) = \frac{٢س - ٥}{س - ٢}$$

الحل

$$د(س) = \frac{٢س - ٦ + ١}{س - ٢}$$

$$د(س) = \frac{٢(س - ٢) + ١}{س - ٢}$$

$$د(س) = ٣ + \frac{١}{س - ٢}$$

* $(٢ ، ٣)$ نقطة التماثل

المجال ح - {٢}

المدى ح - {٣}

مثال ⑧

اذا كان

$د(س) = |س|$

ارسم $ك(س) = د(س - ١) + ٣$

الحل

$ك(س) = |س - ١| + ٣$

ثم نكمل

مثال ⑨

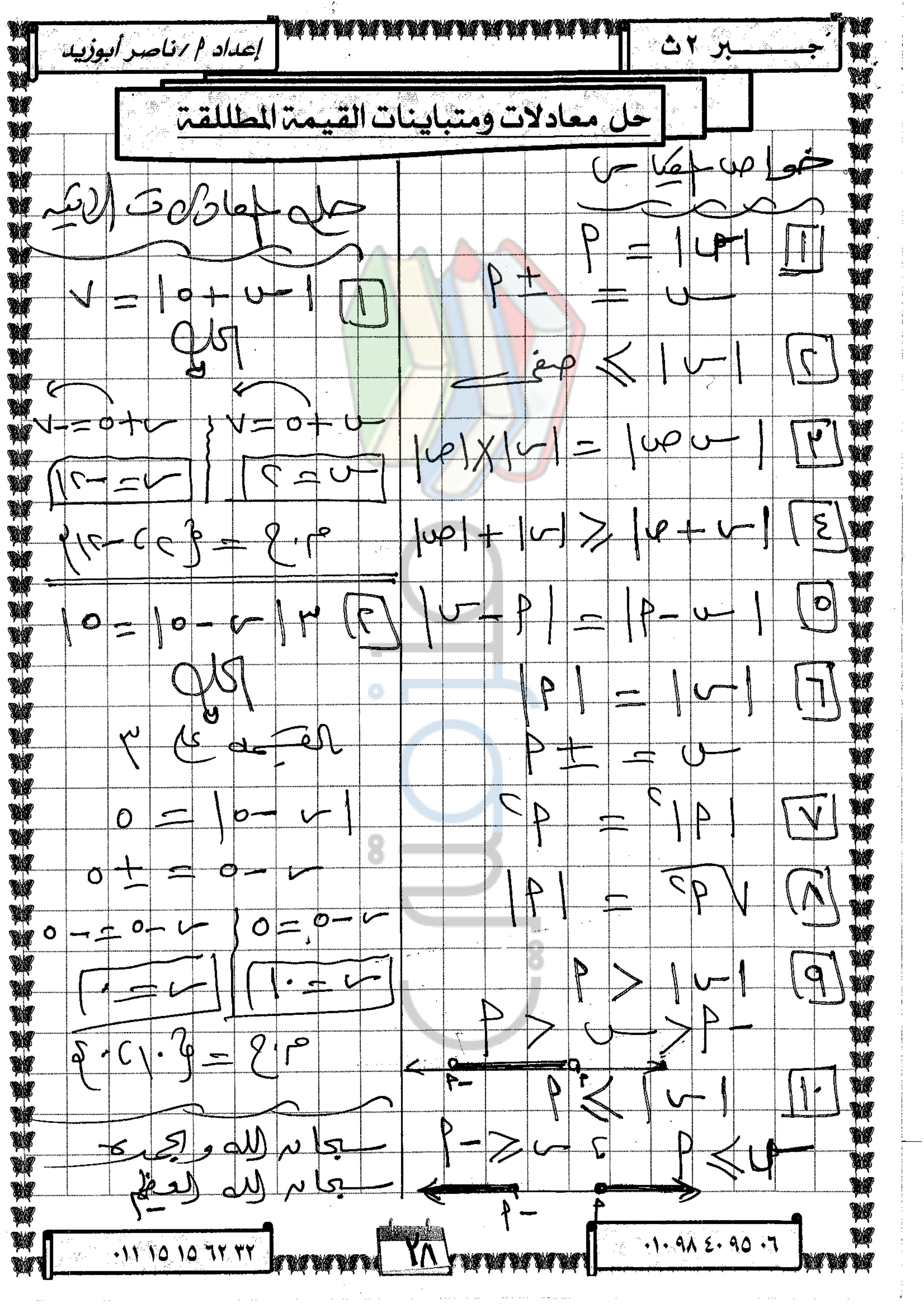
اذا كان

$د(س) = \frac{١}{س}$

ارسم $هـ(س) = د(س + ٢) - ١$

الحل

$هـ(س) = \frac{١}{س + ٢} - ١$



إعداد م / ناصر أبوزيد

حل معادلات ومتباينات القيمة المطللقة

خواص المقياس

1. |س| = أ ⟸ س = ± أ
2. |س| ≥ صفر
3. |س ص| = |س| × |ص|
4. |س + ص| ≤ |س| + |ص|
5. |س − أ| = |أ − س|
6. |س| = |أ| ⟸ س = ± أ
7. |أ|² = أ²
8. √أ² = |أ|
9. |س| < أ ⟸ −أ < س < أ
10. |س| ≥ أ ⟸ س ≥ أ أو س ≤ −أ

حل المعادلات الآتية

1) |س + ٥| = ٧

الحل

س + ٥ = ٧ | س + ٥ = −٧

س = ٢ | س = −١٢

م.ح = {٢ ، −١٢}

2) ٣|س − ٥| = ١٥

الحل

بالقسمة على ٣

|س − ٥| = ٥

س − ٥ = ± ٥

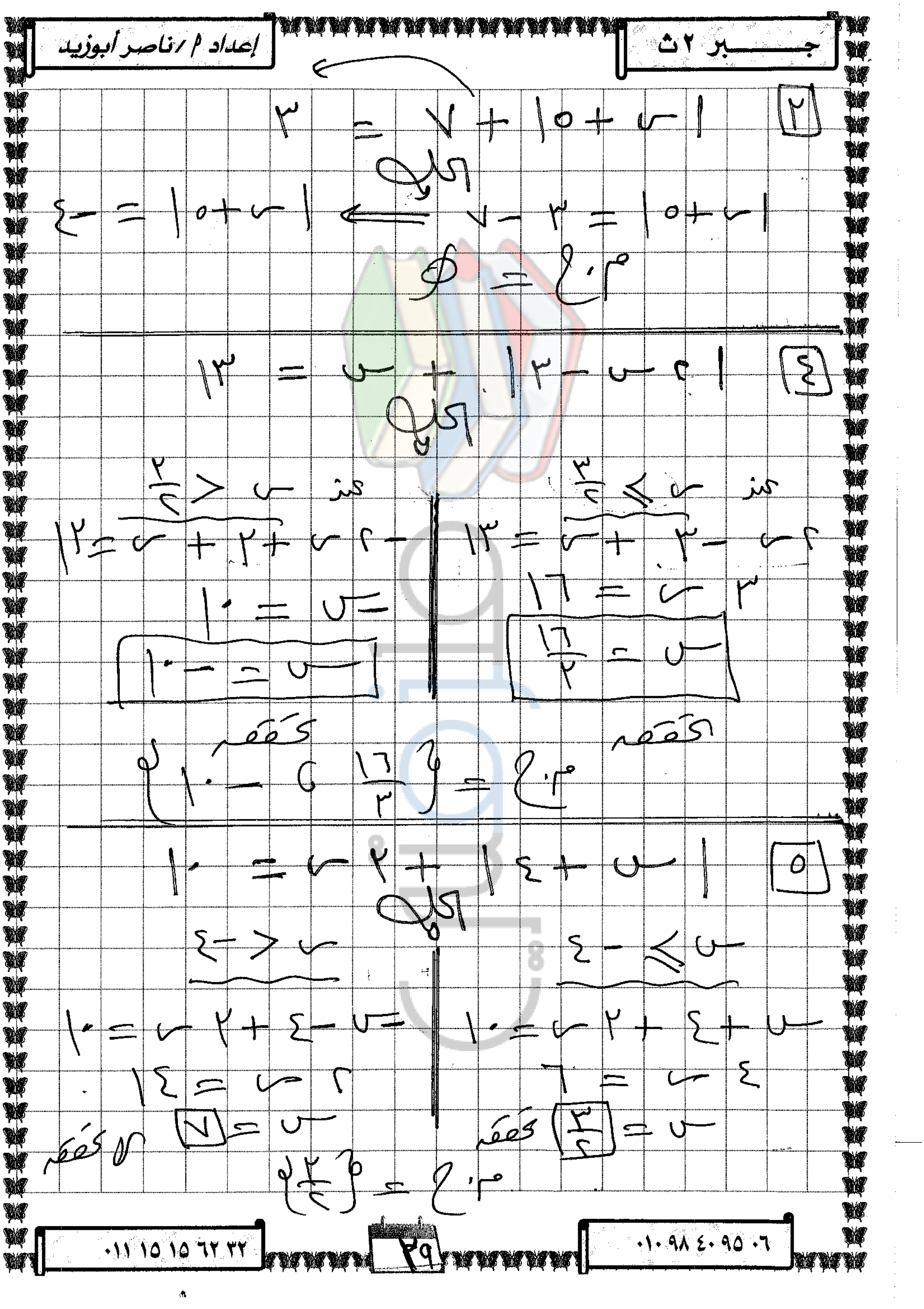
س − ٥ = ٥ | س − ٥ = −٥

س = ١٠ | س = ٠

م.ح = {١٠ ، ٠}

سبحان الله وبحمده
سبحان الله العظيم

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦
٠١١١٥١٥٦٢٣٢



٢ $|س + ٥| + ٧ = ٣$

الحل

$|س + ٥| = ٣ - ٧ \Leftarrow |س + ٥| = -٤$

م.ح = $\emptyset$

---

٤ $|٢س - ٣| + س = ١٣$

الحل

عند $س \geq \frac{٣}{٢}$

$٢س - ٣ + س = ١٣$

$٣س = ١٦$

$س = \frac{١٦}{٣}$

تحقق

عند $س < \frac{٣}{٢}$

$-٢س + ٣ + س = ١٣$

$-س = ١٠$

$س = -١٠$

تحقق

م.ح = $\{\frac{١٦}{٣} ، -١٠\}$

---

٥ $|س + ٤| + ٢س = ١٠$

الحل

$س \geq -٤$

$س + ٤ + ٢س = ١٠$

$٤س = ٦$

$س = \frac{٣}{٢}$ تحقق

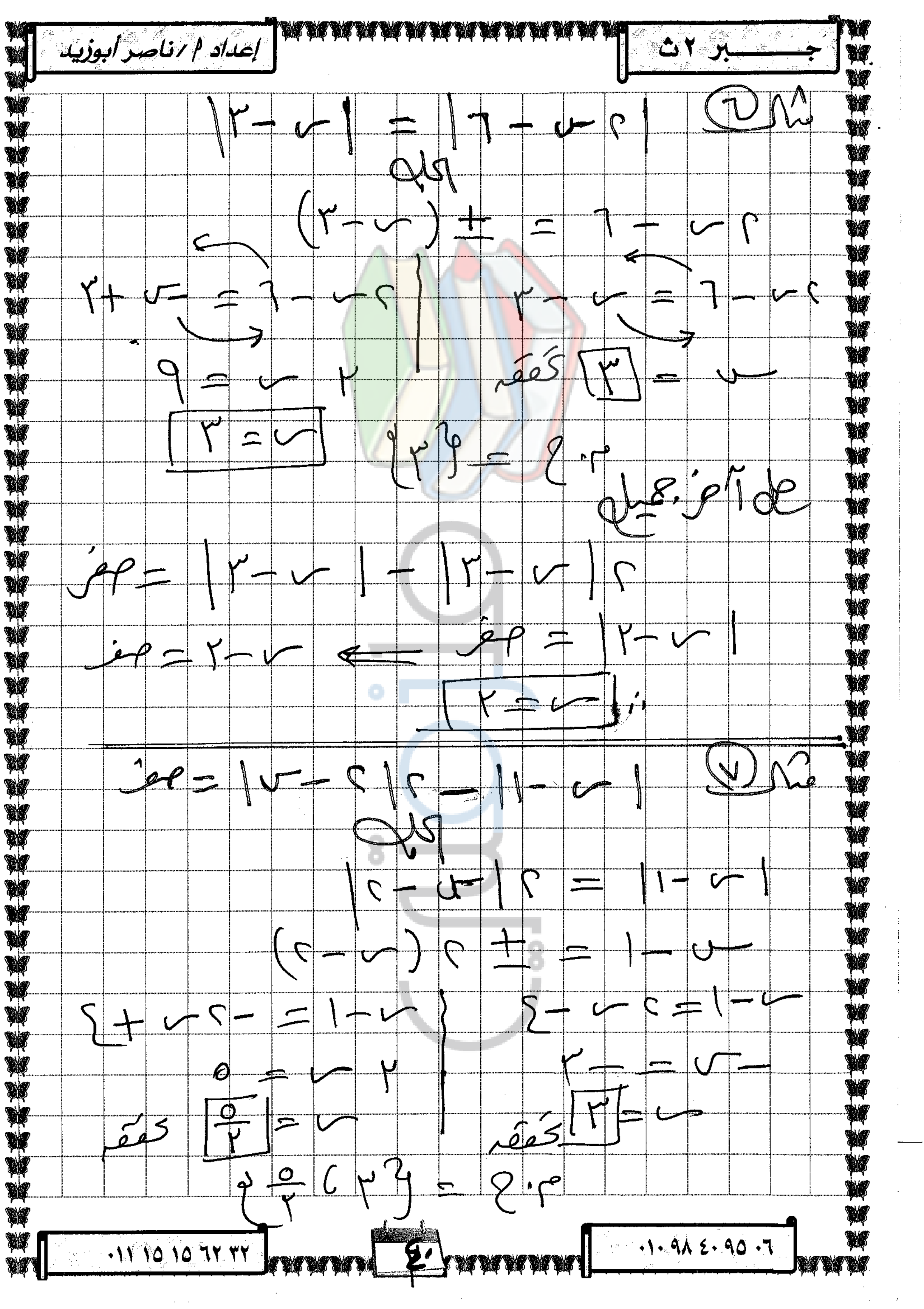
$س < -٤$

$-س - ٤ + ٢س = ١٠$

$٢س = ١٤$

$س = ٧$ لا تحقق

م.ح = $\{\frac{٣}{٢}\}$



مثال (٦) $|٢س - ٦| = |س - ٣|$

الحل

$٢س - ٦ = \pm (س - ٣)$

$٢س - ٦ = س - ٣$ | $٢س - ٦ = -س + ٣$

$س = ٣$ تحقق | $٣س = ٩$

| $س = ٣$

م.ح $= \{٣\}$

حل آخر جميل

$٢|س - ٣| - |س - ٣| = صفر$

$|س - ٣| = صفر \Leftarrow س - ٣ = صفر$

$\therefore س = ٣$

مثال (٧) $|س - ١| - ٢|س - ٢| = صفر$

الحل

$|س - ١| = ٢|س - ٢|$

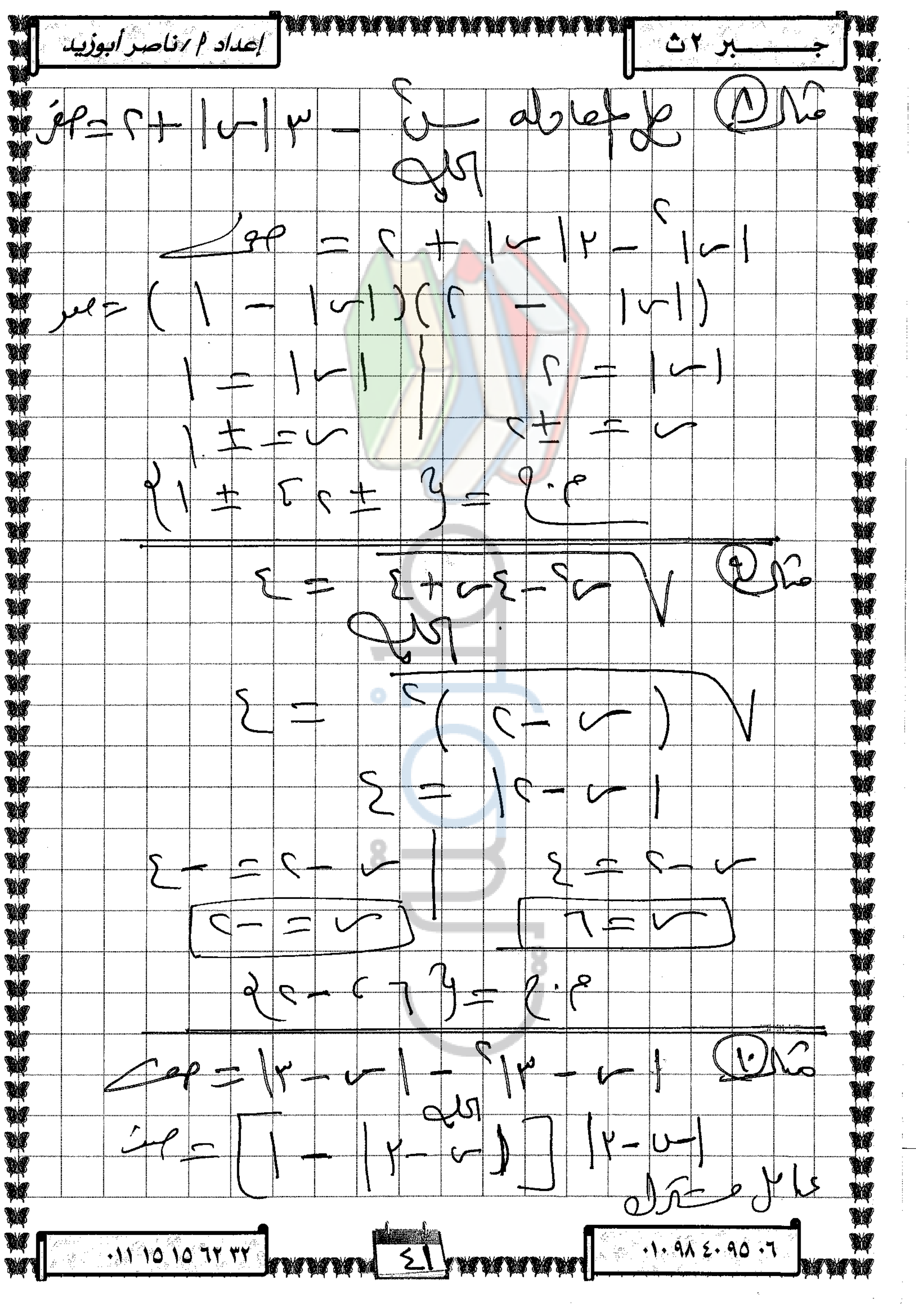
$س - ١ = \pm ٢(س - ٢)$

$س - ١ = ٢س - ٤$ | $س - ١ = -٢س + ٤$

$-س = -٣$ | $٣س = ٥$

$س = ٣$ تحقق | $س = \frac{٥}{٣}$ تحقق

م.ح $= \{٣ ، \frac{٥}{٣}\}$



مثال ⑧ حل المعادلة $س^٢ - ٣|س| + ٢ = صفر$

الحل

$|س|^٢ - ٣|س| + ٢ = صفر$

$(|س| - ١)(|س| - ٢) = صفر$

$|س| = ٢$ | $|س| = ١$

$س = \pm ٢$ | $س = \pm ١$

م.ح = {±٢ ، ±١}

مثال ⑨ $\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤} = ٤$

الحل

$\sqrt{(س - ٢)^٢} = ٤$

$|س - ٢| = ٤$

$س - ٢ = ٤$ | $س - ٢ = -٤$

$س = ٦$ | $س = -٢$

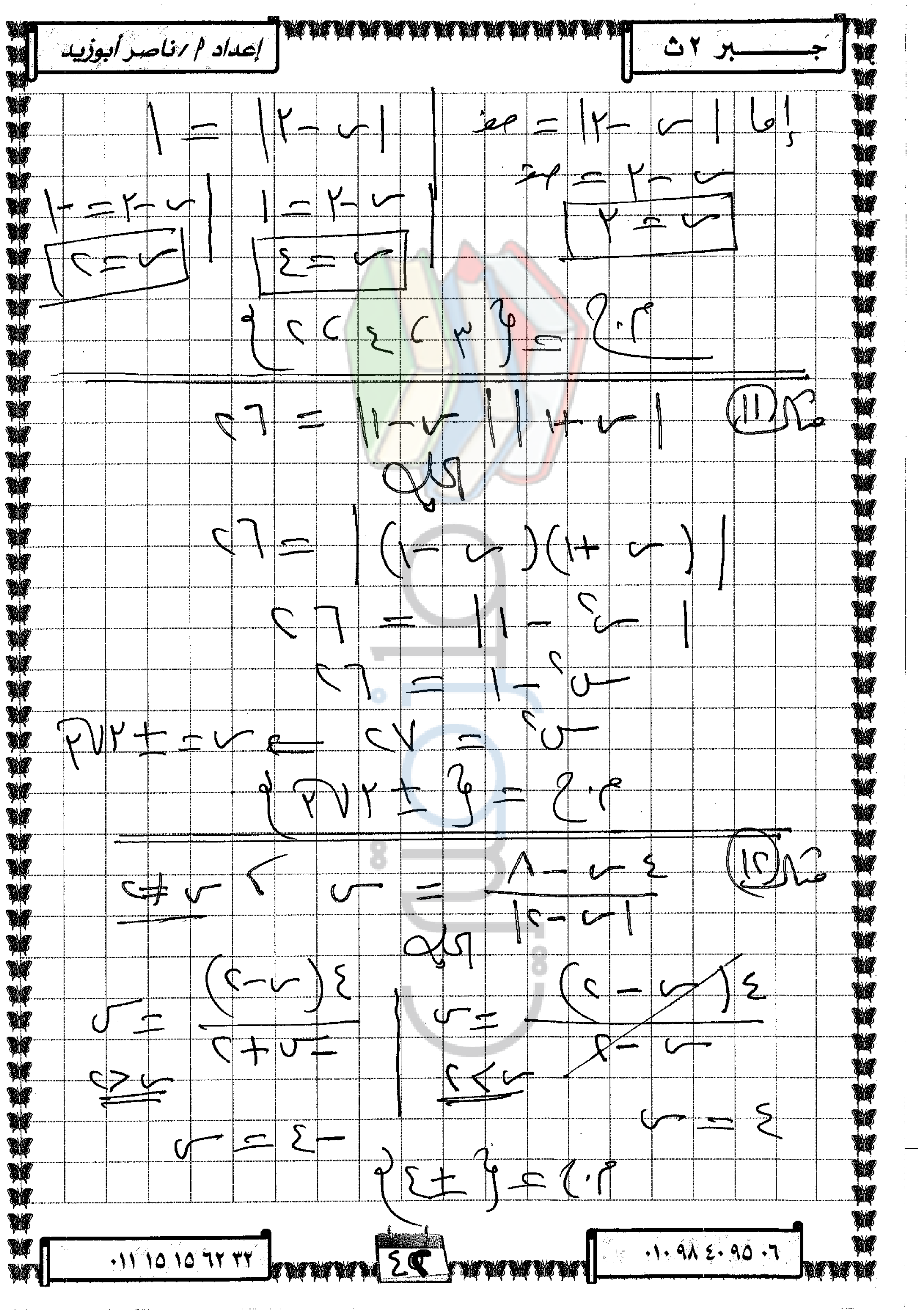
م.ح = {٦ ، −٢}

مثال ⑩ $|س - ٣|^٢ - |س - ٣| = صفر$

الحل

$|س - ٣| \left[|س - ٣| - ١ \right] = صفر$

عامل مشترك



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

أما $|س - ٢| = صفر$ ⟸ $س - ٢ = صفر$ ⟸ $س = ٢$

$||س - ٢| = ١$

$س - ٢ = ١$ ⟸ $س = ٤$ | $س - ٢ = -١$ ⟸ $س = ٢$

$م.ح = \{٣ ، ٤ ، ٢\}$

مثال (١١): $|س + ١| \, |س - ١| = ٢٦$

الحل

$|(س + ١)(س - ١)| = ٢٦$

$|س^٢ - ١| = ٢٦$

$س^٢ - ١ = ٢٦$

$س^٢ = ٢٧$ ⟸ $س = \pm ٣\sqrt{٣}$

$م.ح = \{\pm ٣\sqrt{٣}\}$

مثال (١٢): $\frac{٤س - ٨}{|س - ٢|} = س$ ، $س \neq ٢$

الحل

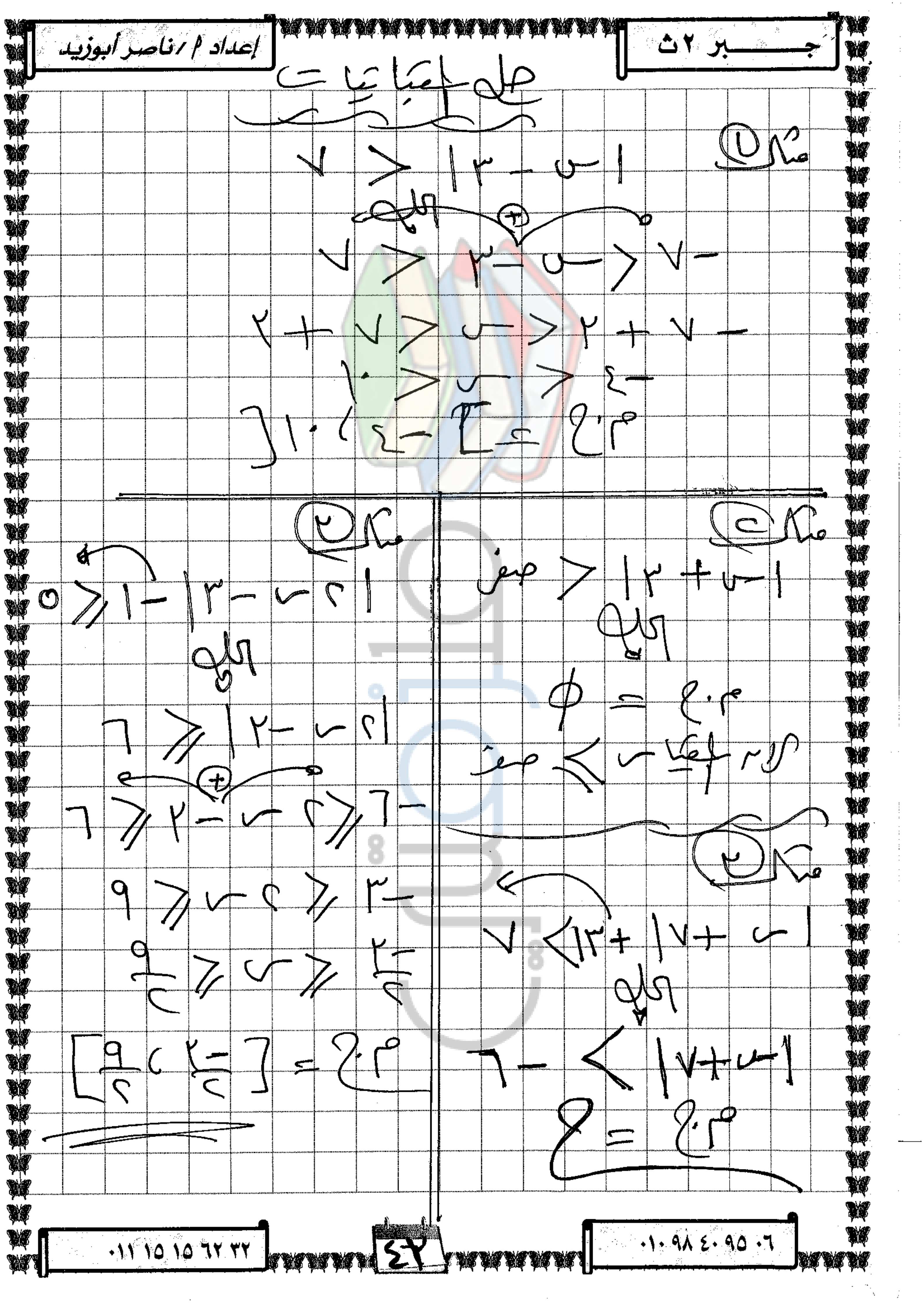
$\frac{٤(س - ٢)}{س - ٢} = س$ ، $س > ٢$ ⟸ $٤ = س$

$\frac{٤(س - ٢)}{-س + ٢} = س$ ، $س < ٢$ ⟸ $-٤ = س$

$م.ح = \{\pm ٤\}$

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦

٠١١١٥١٥٦٢٣٢



إعداد م / ناصر أبوزيد

حل المتباينات

مثال ①

|س − ٣| < ٧

الحل

−٧ < س − ٣ < ٧

−٧ + ٣ < س < ٧ + ٣

−٤ < س < ١٠

م.ح =]−٤ ، ١٠[

مثال ②

|س + ٣| < صفر

الحل

م.ح = ∅

لأن المقياس ≥ صفر

مثال ③

|س + ٧| + ١٣ < ٧

الحل

|س + ٧| < −٦

م.ح = ∅

مثال ②

|٢س − ٣| − ١ ≤ ٥

الحل

|٢س − ٣| ≤ ٦

−٦ ≤ ٢س − ٣ ≤ ٦

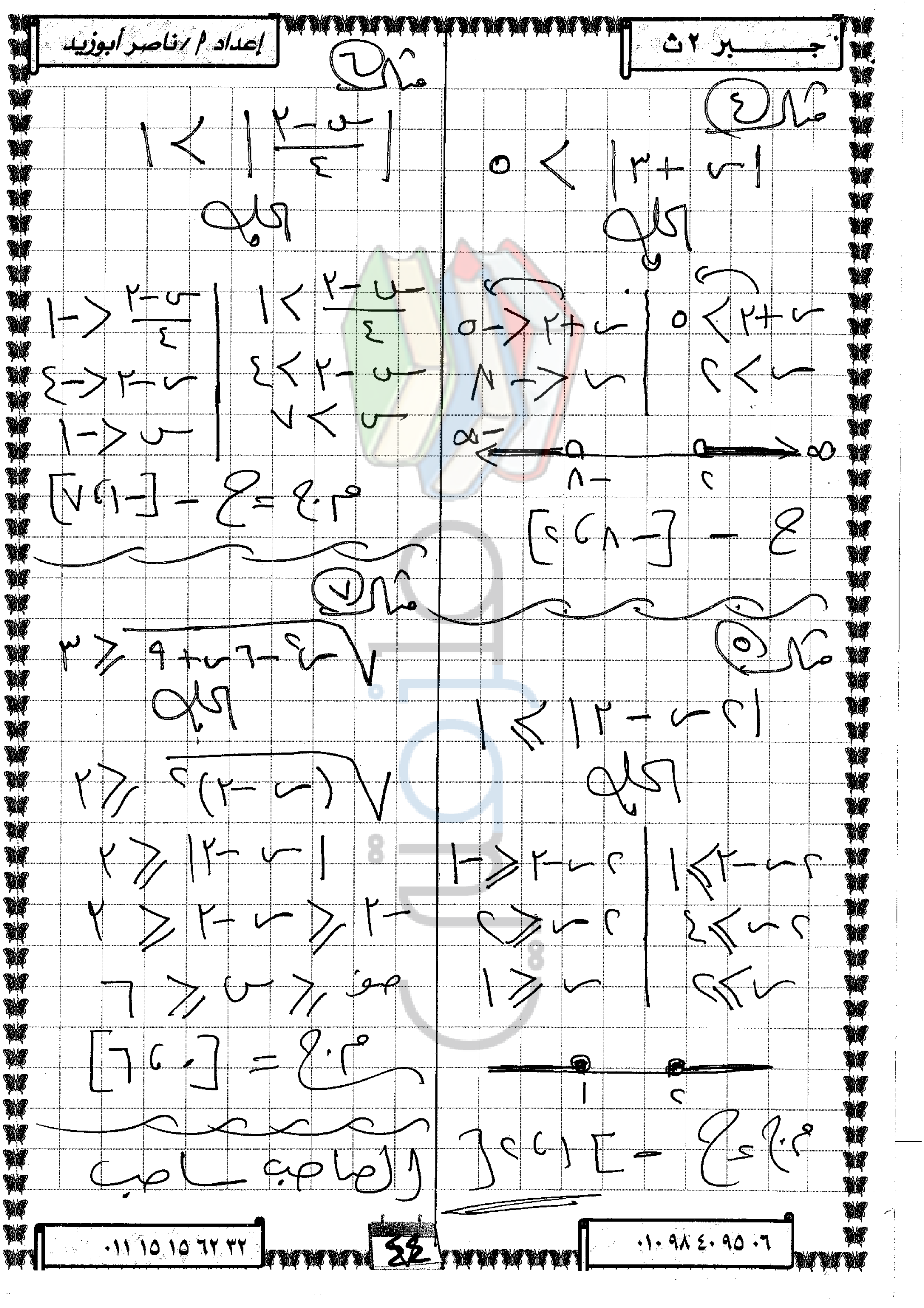
−٣ ≤ ٢س ≤ ٩

$-\frac{3}{2}$ ≤ س ≤ $\frac{9}{2}$

م.ح = [$-\frac{3}{2}$ ، $\frac{9}{2}$]

٠١١ ١٥ ١٥ ٦٢ ٣٢

٠١٠ ٩٨ ٤٠ ٩٥ ٠٦



مثال (٤)

|س + ٣| > ٥

الحل

س + ٣ > ٥ ، س > ٢ | س + ٣ < -٥ ، س < -٨

(خط الأعداد: -٨ ، ٢)

ح - [-٨ ، ٢]

مثال (٥)

|٢س - ٣| ≥ ١

الحل

٢س - ٣ ≥ ١ ، ٢س ≥ ٤ ، س ≥ ٢ | ٢س - ٣ ≤ -١ ، ٢س ≤ ٢ ، س ≤ ١

(خط الأعداد: ١ ، ٢)

م.ح = ح -]١ ، ٢[

مثال (٦)

|(س - ٣) / ٤| > ١

الحل

(س - ٣) / ٤ > ١ ، س - ٣ > ٤ ، س > ٧ | (س - ٣) / ٤ < -١ ، س - ٣ < -٤ ، س < -١

م.ح = ح - [-١ ، ٧]

مثال (٧)

√(س² - ٦س + ٩) ≤ ٣

الحل

√((س - ٣)²) ≤ ٣

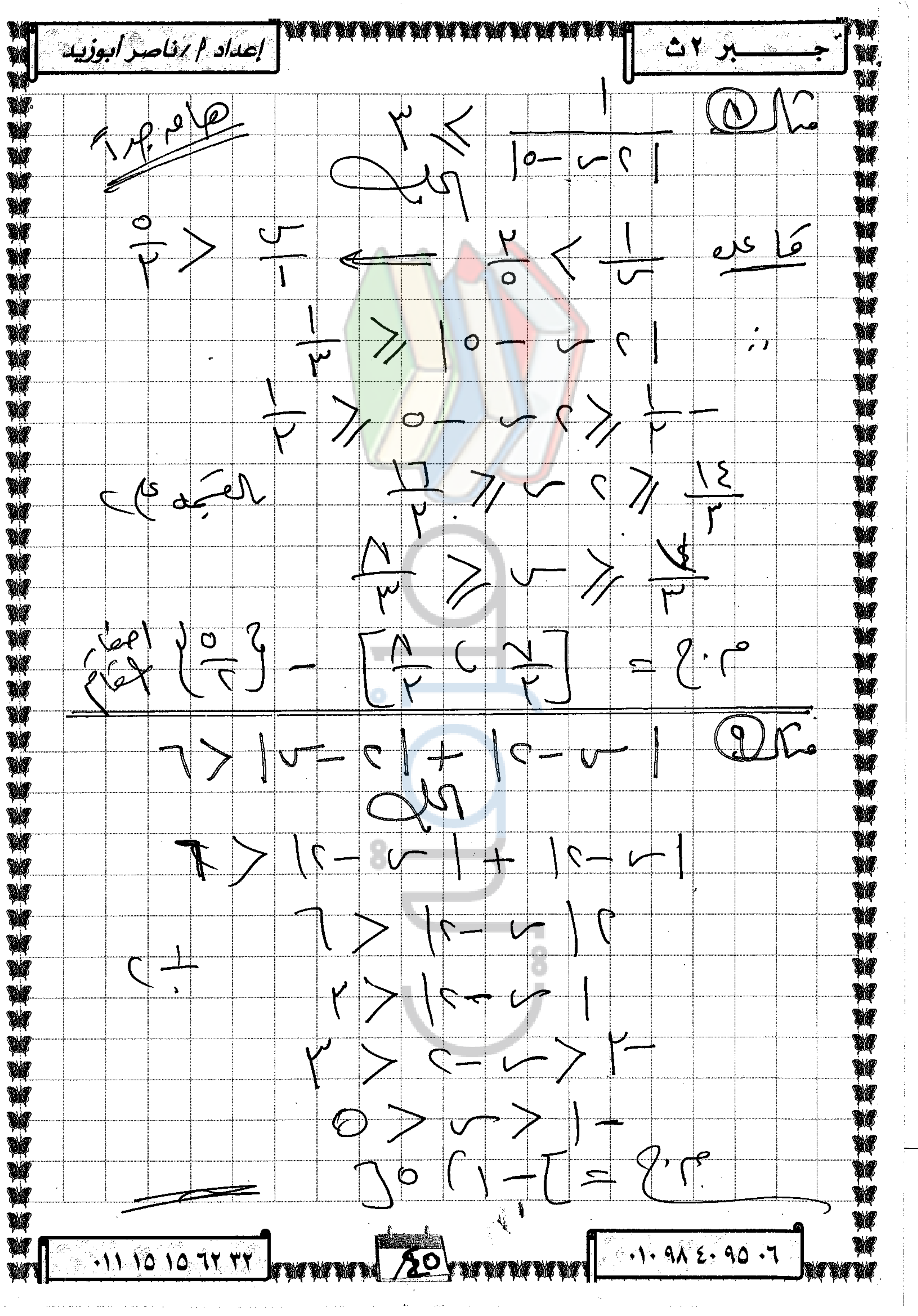
|س - ٣| ≤ ٣

-٣ ≤ س - ٣ ≤ ٣

صفر ≤ س ≤ ٦

م.ح = [٠ ، ٦]

الصاحب ساحب



مثال ٨ $\frac{1}{|2س - 10|} \geq 3$ حل

هام جداً

قاعدة: $\frac{1}{س} > \frac{2}{5} \leftarrow \frac{س}{1} < \frac{5}{2}$

$\therefore |2س - 10| \leq \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} \leq 2س - 5 \leq \frac{1}{3}$

$\frac{14}{3} \leq 2س \leq \frac{16}{3}$ بالقسمة ÷ ٢

$\frac{7}{3} \leq س \leq \frac{8}{3}$

م.ح = $[\frac{7}{3} ، \frac{8}{3}] - \{\frac{5}{2}\}$ أصفار المقام

مثال ٩ $|س - 2| + |2 - س| < 6$ حل

$|س - 2| + |س - 2| < 6$

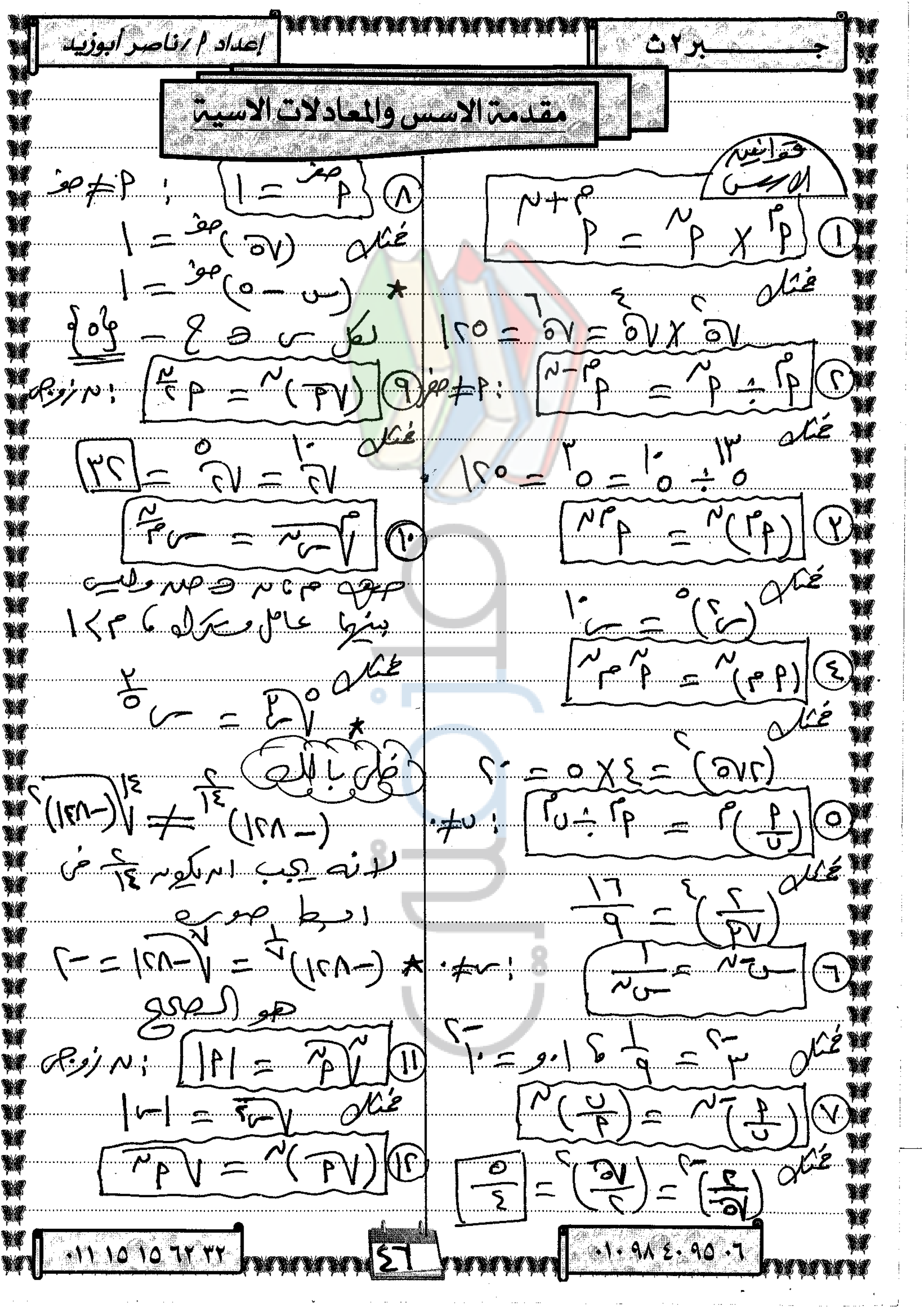
$2|س - 2| < 6$ ÷ ٢

$|س - 2| < 3$

$-3 < س - 2 < 3$

$-1 < س < 5$

م.ح = $]-1 ، 5[$



مقدمة الأسس والمعادلات الأسية

قوانين الأسس

① $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

مثال: $(\sqrt{٥})^{٢} \times (\sqrt{٥})^{٤} = (\sqrt{٥})^{٦} = ١٢٥$

② $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$ ؛ $أ \neq$ صفر

مثال: $٥^{١٣} \div ٥^{١٠} = ٥^{٣} = ١٢٥$

③ $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

مثال: $(س^{٢})^{٥} = س^{١٠}$

④ $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

مثال: $(٢\sqrt{٥})^{٢} = ٤ \times ٥ = ٢٠$

⑤ $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = أ^{م} \div ب^{م}$ ؛ $ب \neq ٠$

مثال: $\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)^{٤} = \frac{١٦}{٩}$

⑥ $س^{-ن} = \frac{١}{س^{ن}}$ ؛ $س \neq ٠$

مثال: $٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$ ، $١٠^{-٢} = ٠٫٠١$

⑦ $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن}$

مثال: $\left(\frac{٢}{\sqrt{٥}}\right)^{-٢} = \left(\frac{\sqrt{٥}}{٢}\right)^{٢} = \frac{٥}{٤}$

⑧ $أ^{\text{صفر}} = ١$ ؛ $أ \neq$ صفر

مثال: $(\sqrt{٥})^{\text{صفر}} = ١$

★ $(س - ٥)^{\text{صفر}} = ١$ لكل $س \in ح - \{٥\}$

⑨ $(\sqrt{أ})^{ن} = أ^{\frac{ن}{٢}}$ ؛ ن زوجي

مثال: $(\sqrt{٢})^{١٠} = ٢^{٥} = ٣٢$

⑩ $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

حيث م ، ن ∈ ص وليس بينهما عامل مشترك ، م ≥ ٢

مثال: ★ $\sqrt[٥]{س^{٢}} = س^{\frac{٢}{٥}}$

خلي بالك

$(-١٢٨)^{\frac{٢}{١٤}} \neq \sqrt[١٤]{(-١٢٨)^{٢}}$

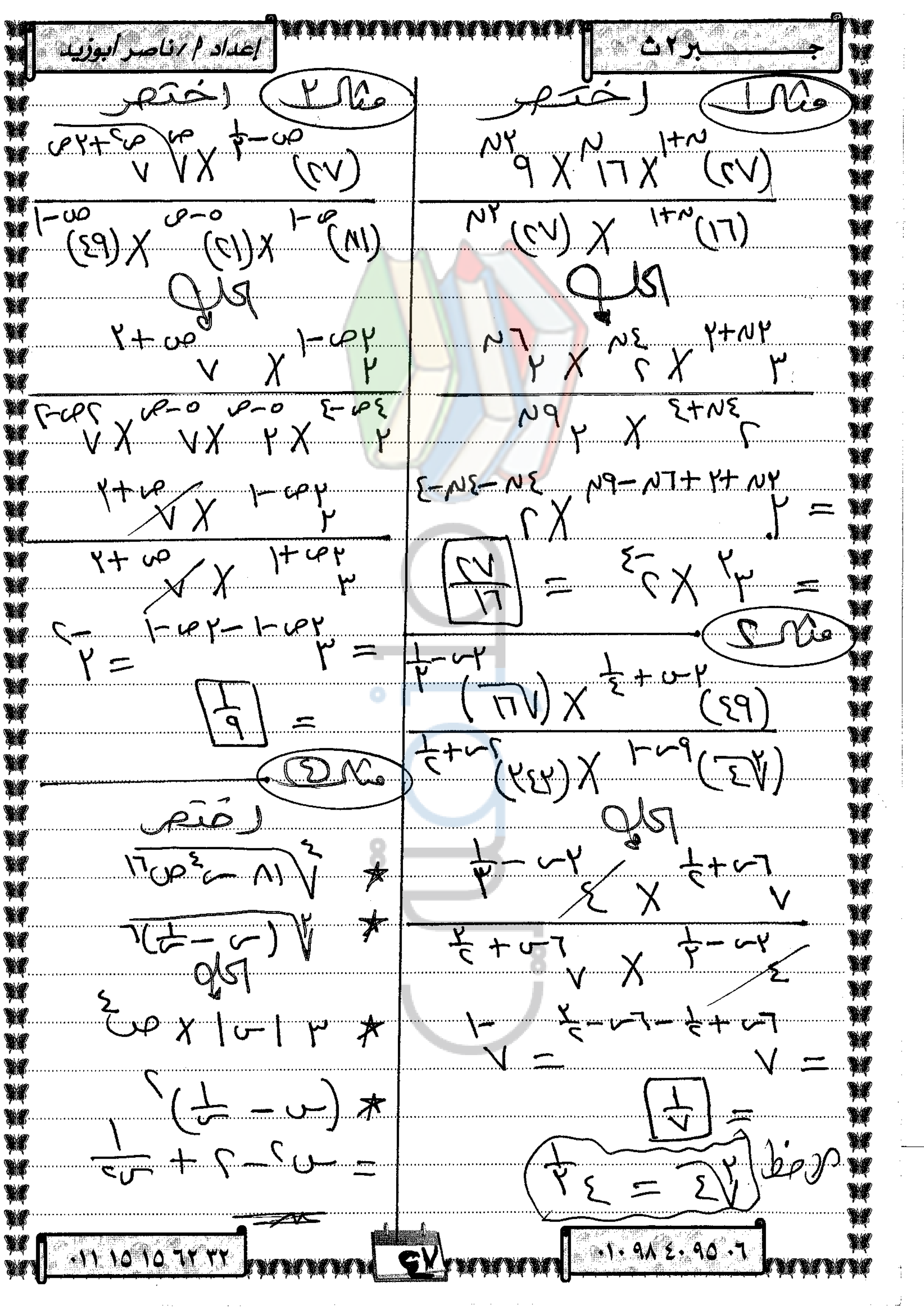
لأنه يجب أن يكون $\frac{٢}{١٤}$ في أبسط صورة

★ $(-١٢٨)^{\frac{١}{٧}} = \sqrt[٧]{-١٢٨} = -٢$ هو الصحيح

⑪ $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = |أ|$ ؛ ن زوجي

مثال: $\sqrt[٤]{س^{٤}} = |س|$

⑫ $(\sqrt{أ})^{ن} = \sqrt{أ^{ن}}$



مثال ١ اختصر

$$\frac{(27)^{ن+1} \times 16^{ن} \times 9^{2ن}}{(16)^{ن+1} \times (27)^{2ن}}$$

الحل

$$\frac{3^{2ن+3} \times 2^{4ن} \times 2^{6ن}}{2^{4ن+4} \times 3^{9ن}}$$

$$= 3^{2ن+3+6ن-9ن} \times 2^{4ن-4ن-4}$$

$$= 3^{3} \times 2^{-4} = \boxed{\frac{27}{16}}$$

مثال ٣

$$\frac{(49)^{2س+\frac{1}{4}} \times (\sqrt{16})^{2س-\frac{1}{2}}}{(343)^{2س+\frac{1}{2}} \times (\sqrt[4]{2})^{9س-1}}$$

الحل

$$\frac{7^{6س+\frac{1}{2}} \times \cancel{4}^{2س-\frac{1}{2}}}{7^{6س+\frac{3}{2}} \times \cancel{4}^{2س-\frac{1}{2}}}$$

$$= 7^{6س+\frac{1}{2}-6س-\frac{3}{2}} = 7^{-1}$$

$$= \boxed{\frac{1}{7}}$$

ملحوظ: $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$

مثال ٢ اختصر

$$\frac{(27)^{ص-\frac{1}{3}} \times \sqrt{7}^{ص} \times 7^{ص^2+2ص}}{(81)^{ص-1} \times (21)^{ص-5} \times (49)^{ص-1}}$$

الحل

$$\frac{3^{3ص-1} \times 7^{ص+2}}{3^{4ص-4} \times 3^{ص-5} \times 7^{ص-5} \times 7^{2ص-2}}$$

$$\frac{3^{3ص-1} \times \cancel{7^{ص+2}}}{3^{2ص+1} \times \cancel{7^{ص+2}}}$$

$$= 3^{3ص-1-2ص-1} = 3^{-2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{9}}$$

مثال ٤ اختصر

* $\sqrt[4]{81\, س^{4}\, ص^{16}}$
* $\sqrt{(س - \frac{1}{س})^{2}}$

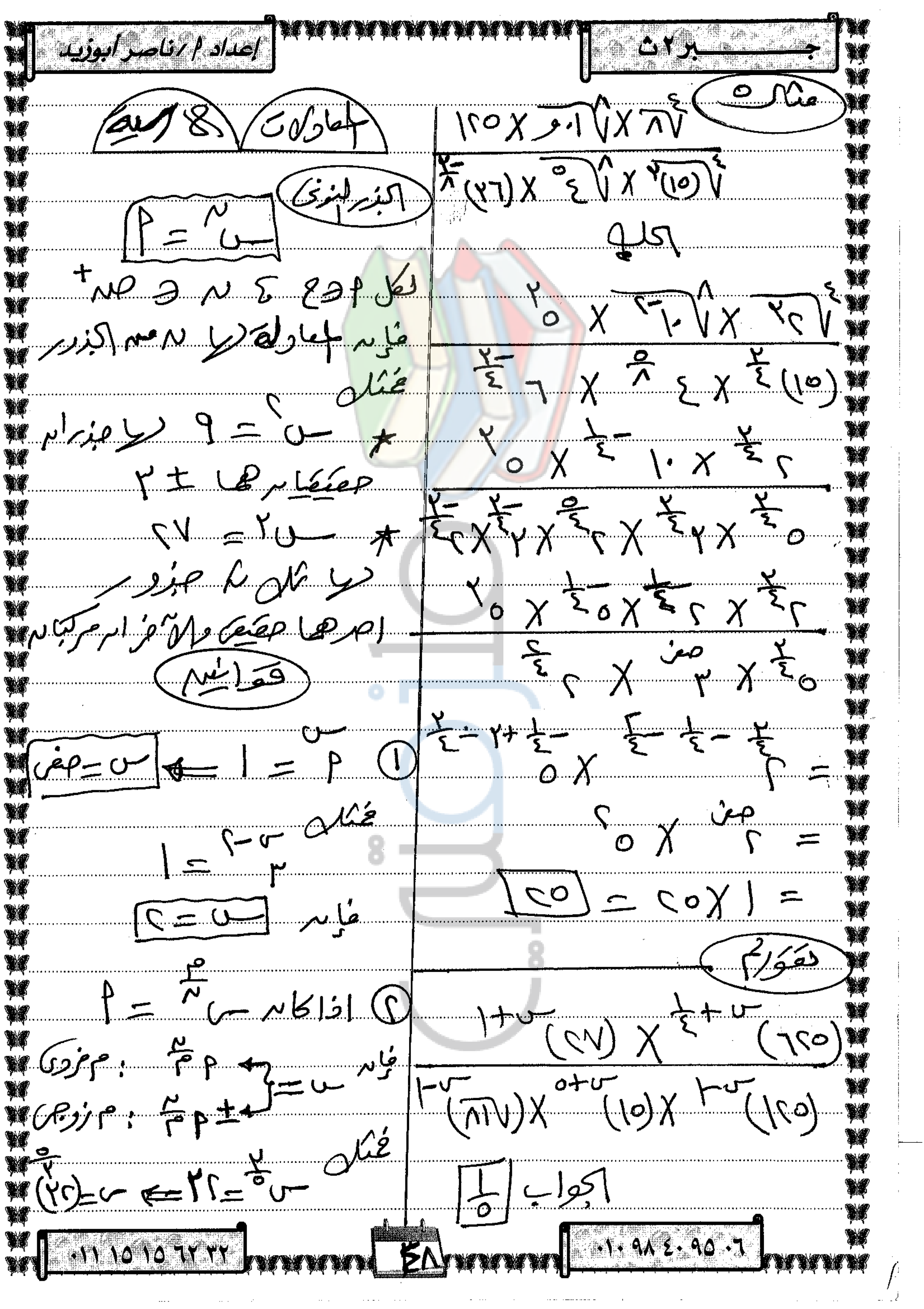
الحل

* $3\,|س| \times ص^{4}$
* $(س - \frac{1}{س})^{2}$

$$= س^{2} - 2 + \frac{1}{س^{2}}$$

٠١١١٥١٥٦٢٣٢

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



المعادلات الأسية

الجذر النوني

$س^{ن} = أ$

لكل أ ∈ ح ، ن ∈ $ص^{+}$ فإن المعادلة لها ن من الجذور

مثال

* $س^{٢} = ٩$ لها جذران حقيقيان هما ± ٣
* $س^{٣} = ٢٧$ لها ثلاث من الجذور أحدها حقيقي والآخران مركبان

قواعد

① $أ^{س} = ١ \Leftarrow$ س = صفر

مثال $٣^{س-٢} = ١$ فإن س = ٢

② إذا كان $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن س = $أ^{\frac{ن}{م}}$: م فردي ، س = $\pm أ^{\frac{ن}{م}}$: م زوجي

مثال $س^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢ \Leftarrow س = (٣٢)^{\frac{٢}{٥}}$

مثال ٥

$$\frac{\sqrt[٤]{٨} \times \sqrt[٨]{٠,٠١} \times ١٢٥}{\sqrt[٤]{(١٥)^{٢}} \times \sqrt[٨]{٤^{٥}} \times (٣٦)^{-\frac{٣}{٨}}}$$

الحل

$$\frac{\sqrt[٤]{٢^{٣}} \times \sqrt[٨]{١٠^{-٢}} \times ٥^{٣}}{(١٥)^{\frac{٢}{٤}} \times ٤^{\frac{٥}{٨}} \times ٦^{-\frac{٣}{٤}}}$$

$$\frac{٢^{\frac{٣}{٤}} \times ١٠^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{٣}}{٥^{\frac{٢}{٤}} \times ٣^{\frac{٢}{٤}} \times ٢^{\frac{٥}{٤}} \times ٢^{-\frac{٣}{٤}} \times ٣^{-\frac{٣}{٤}}}$$

$$\frac{٢^{\frac{٣}{٤}} \times ٢^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{٣}}{٥^{\frac{٢}{٤}} \times ٣^{صفر} \times ٢^{\frac{٢}{٤}}}$$

$$= ٢^{\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} - \frac{٢}{٤}} \times ٥^{-\frac{١}{٤} + ٣ - \frac{٢}{٤}}$$

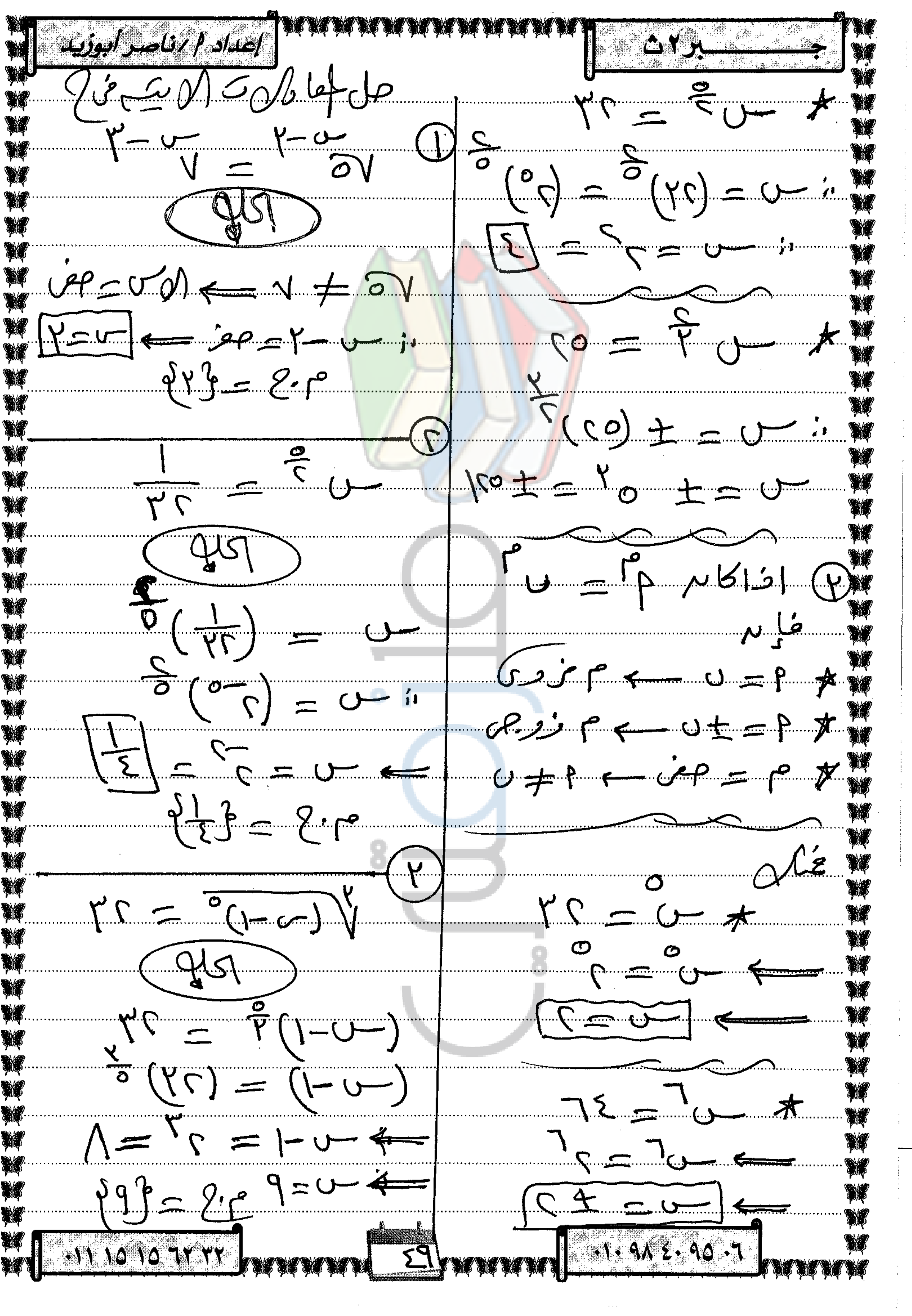
$$= ٢^{صفر} \times ٥^{٢}$$

$$= ١ \times ٢٥ = ٢٥$$

تمرين

$$\frac{(٦٢٥)^{س+\frac{١}{٤}} \times (٢٧)^{س+١}}{(١٢٥)^{س-٢} \times (١٥)^{س+٥} \times (\sqrt{٨١})^{س-١}}$$

الجواب $\frac{١}{٥}$



* $س^{\frac{٥}{٢}} = ٣٢$

$\therefore س = (٣٢)^{\frac{٢}{٥}} = (٢^{٥})^{\frac{٢}{٥}}$

$\therefore س = ٢^{٢} = ٤$

* $س^{\frac{٢}{٣}} = ٢٥$

$\therefore س = \pm (٢٥)^{\frac{٣}{٢}}$

$س = \pm ٥^{٣} = \pm ١٢٥$

(٢) إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ فإن

* أ = ب ← م فردي
* أ = ± ب ← م زوجي
* م = صفر ← أ ≠ ب

مثال

* $س^{٥} = ٣٢$

$\Leftarrow س^{٥} = ٢^{٥}$

$\Leftarrow س = ٢$

* $س^{٦} = ٦٤$

$\Leftarrow س^{٦} = ٢^{٦}$

$\Leftarrow س = \pm ٢$

حل المعادلات الآتية في ح

(١) $٥٧^{س-٢} = ٧^{س-٣}$

الحل

$٥٧ \neq ٧ \Leftarrow$ الأس = صفر

$\therefore س - ٢ = $ صفر $\Leftarrow س = ٢$

م.ح = {٢}

(٢) $س^{\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٣٢}$

الحل

$س = \left(\frac{١}{٣٢}\right)^{\frac{٢}{٥}}$

$\therefore س = (٢^{-٥})^{\frac{٢}{٥}}$

$\Leftarrow س = ٢^{-٢} = \frac{١}{٤}$

م.ح = $\{\frac{١}{٤}\}$

(٢) $\sqrt[٣]{(س-١)^{٥}} = ٣٢$

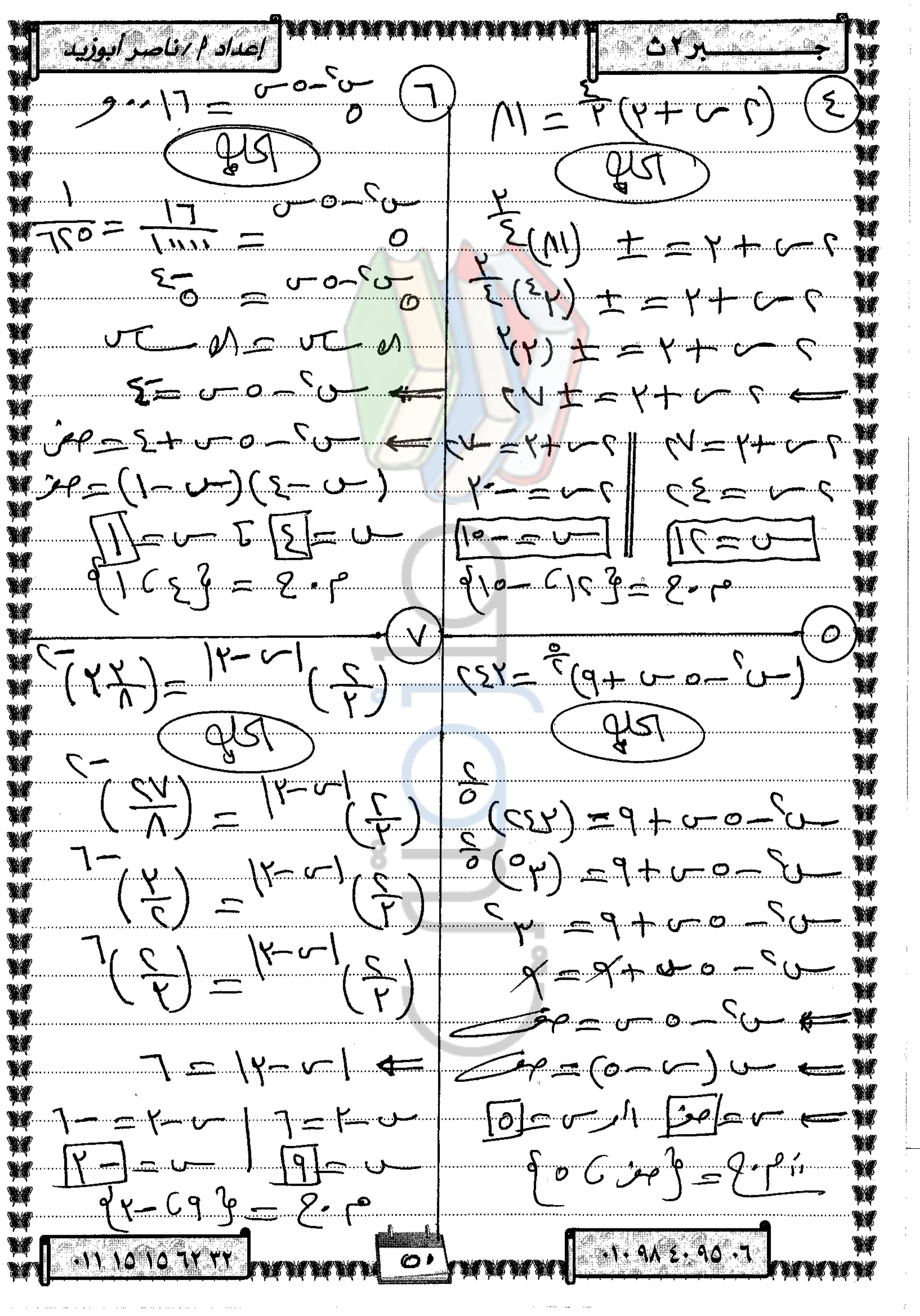
الحل

$(س-١)^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$

$(س-١) = (٣٢)^{\frac{٣}{٥}}$

$\Leftarrow س - ١ = ٢^{٣} = ٨$

$\Leftarrow س = ٩$ م.ح = {٩}



(٤)

$(2\text{ن}+3)^{\frac{4}{3}} = 81$

الحل

$2\text{ن}+3 = \pm(81)^{\frac{3}{4}}$

$2\text{ن}+3 = \pm(3^4)^{\frac{3}{4}}$

$2\text{ن}+3 = \pm(3)^3$

$\Leftarrow 2\text{ن}+3 = \pm 27$

$2\text{ن}+3 = 27$	$2\text{ن}+3 = -27$
$2\text{ن} = 24$	$2\text{ن} = -30$
$\boxed{\text{ن} = 12}$	$\boxed{\text{ن} = -15}$

م.ح $= \{12 ، -15\}$

(٥)

$(\text{س}^2 - 5\text{س} + 9)^{\frac{5}{2}} = 243$

الحل

$\text{س}^2 - 5\text{س} + 9 = (243)^{\frac{2}{5}}$

$\text{س}^2 - 5\text{س} + 9 = (3^5)^{\frac{2}{5}}$

$\text{س}^2 - 5\text{س} + 9 = 3^2$

$\text{س}^2 - 5\text{س} + \cancel{9} = \cancel{9}$

$\Leftarrow \text{س}^2 - 5\text{س} = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{س}(\text{س} - 5) = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{س} = \boxed{\text{صفر}}$ أو $\text{س} = \boxed{5}$

م.ح $= \{\text{صفر} ، 5\}$

(٦)

$5^{\text{س}^2 - 5\text{س}} = 0.0016$

الحل

$5^{\text{س}^2 - 5\text{س}} = \frac{16}{10000} = \frac{1}{625}$

$5^{\text{س}^2 - 5\text{س}} = 5^{-4}$

∵ الأساس = الأساس

$\Leftarrow \text{س}^2 - 5\text{س} = -4$

$\Leftarrow \text{س}^2 - 5\text{س} + 4 = \text{صفر}$

$(\text{س} - 4)(\text{س} - 1) = \text{صفر}$

$\text{س} = \boxed{4}$ أو $\text{س} = \boxed{1}$

م.ح $= \{4 ، 1\}$

(٧)

$\left(\frac{2}{3}\right)^{|\text{س}-3|} = \left(3\frac{3}{8}\right)^{-2}$

الحل

$\left(\frac{2}{3}\right)^{|\text{س}-3|} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-2}$

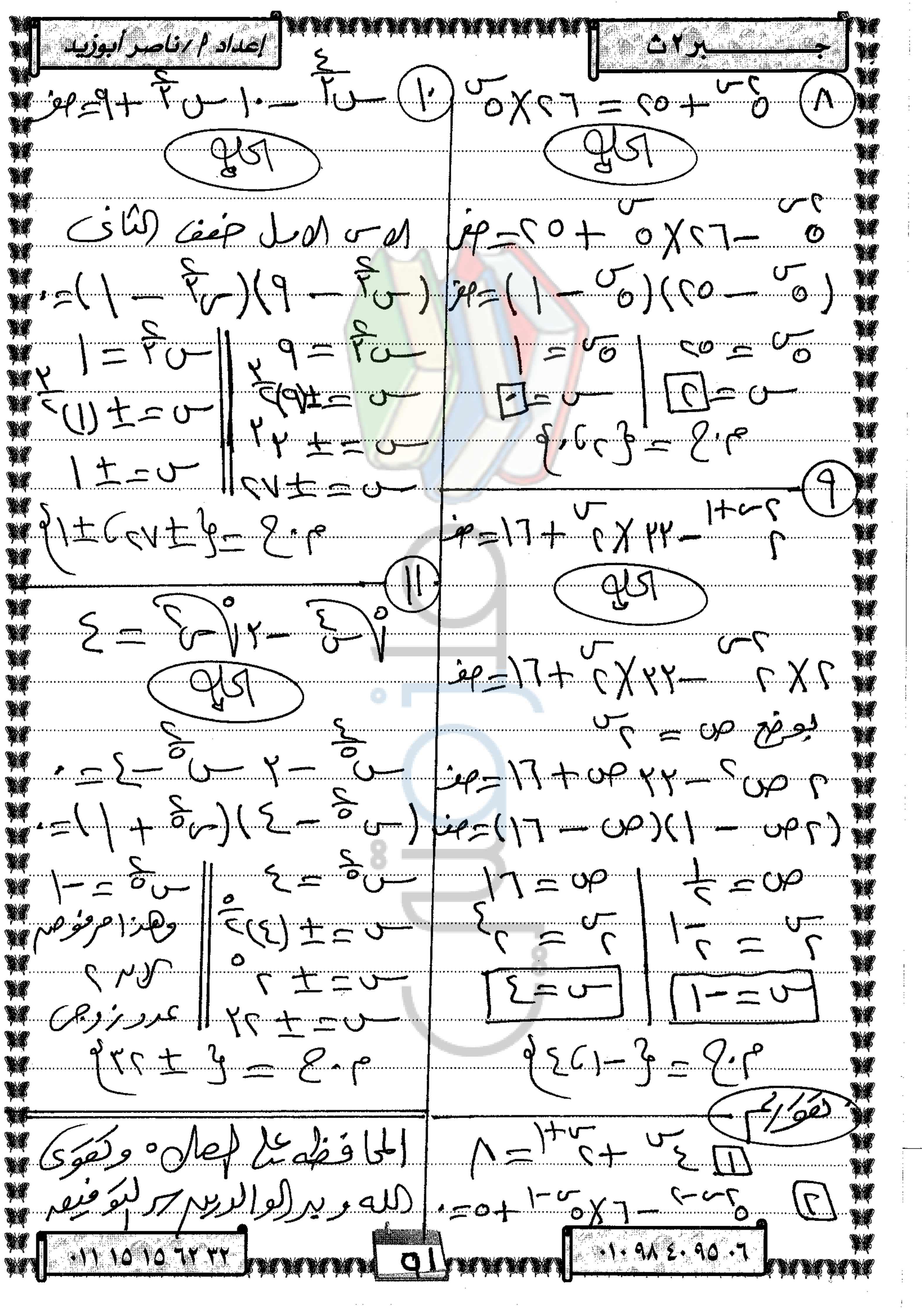
$\left(\frac{2}{3}\right)^{|\text{س}-3|} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-6}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{|\text{س}-3|} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$

$\Leftarrow |\text{س}-3| = 6$

$\text{س} - 3 = 6$	$\text{س} - 3 = -6$
$\text{س} = \boxed{9}$	$\text{س} = \boxed{-3}$

م.ح $= \{9 ، -3\}$



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

(٨) $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$

الحل

$٥^{٢س} - ٢٦ \times ٥^{س} + ٢٥ = صفر$

$(٥^{س} - ٢٥)(٥^{س} - ١) = صفر$

$٥^{س} = ٢٥ \Rightarrow س = ٢$ | $٥^{س} = ١ \Rightarrow س = ٠$

م.ح = $\{٢ ، ٠\}$

(٩) $٢^{٢س+١} - ٣٣ \times ٢^{س} + ١٦ = صفر$

الحل

$٢ \times ٢^{٢س} - ٣٣ \times ٢^{س} + ١٦ = صفر$

بوضع $ص = ٢^{س}$

$٢ص^{٢} - ٣٣ص + ١٦ = صفر$

$(٢ص - ١)(ص - ١٦) = صفر$

$ص = \frac{١}{٢}$ ، $٢^{س} = \frac{١}{٢}$ ، $س = -١$ | $ص = ١٦$ ، $٢^{س} = ٢^{٤}$ ، $س = ٤$

م.ح = $\{-١ ، ٤\}$

(١٠) $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = صفر$

الحل

الأس الأول ضعف الثاني

$(س^{\frac{٢}{٣}} - ٩)(س^{\frac{٢}{٣}} - ١) = صفر$

$س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ ، $س = \pm(٩)^{\frac{٣}{٢}}$ ، $س = \pm ٣^{٣}$ ، $س = \pm ٢٧$ || $س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ ، $س = \pm(١)^{\frac{٣}{٢}}$ ، $س = \pm ١$

م.ح = $\{\pm ٢٧ ، \pm ١\}$

(١١) $\sqrt[٥]{س^{٤}} - ٣\sqrt[٥]{س^{٢}} = ٤$

الحل

$س^{\frac{٤}{٥}} - ٣ س^{\frac{٢}{٥}} - ٤ = صفر$

$(س^{\frac{٢}{٥}} - ٤)(س^{\frac{٢}{٥}} + ١) = صفر$

$س^{\frac{٢}{٥}} = ٤$ ، $س = \pm(٤)^{\frac{٥}{٢}}$ ، $س = \pm ٢^{٥}$ ، $س = \pm ٣٢$ || $س^{\frac{٢}{٥}} = -١$ وهذا مرفوض لأن ٢ عدد زوجي

م.ح = $\{\pm ٣٢\}$

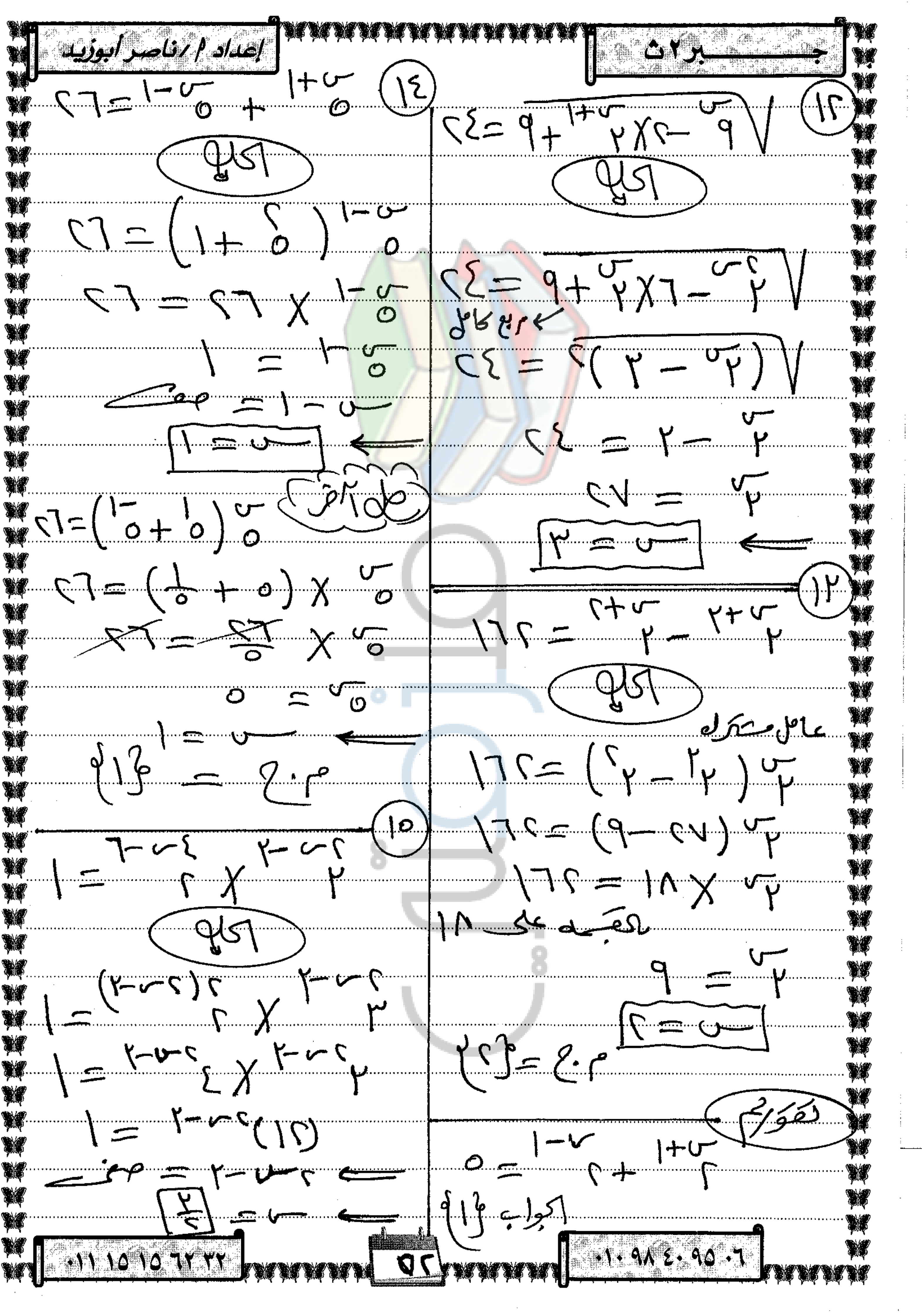
تمارين

(١) $٤^{س} + ٢^{س+١} = ٨$

(٢) $٥^{٢س-٢} - ٦ \times ٥^{س-١} + ٥ = صفر$

المحافظة على الصلاة وتقوى الله وبر الوالدين سر التوفيق

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢



(١١) $\sqrt{9^{س} - 2\times 3^{س+1} + 9} = 24$

الحل

$\sqrt{3^{2س} - 6\times 3^{س} + 9} = 24$ ← مربع كامل

$\sqrt{(3^{س} - 3)^2} = 24$

$3^{س} - 3 = 24$

$3^{س} = 27$

$\Leftarrow$ $س = 3$

(١٢) $3^{س+3} - 3^{س+2} = 162$

الحل

عامل مشترك

$3^{س}(3^3 - 3^2) = 162$

$3^{س}(27 - 9) = 162$

$3^{س} \times 18 = 162$

بالقسمة على ١٨

$3^{س} = 9$

$س = 2$

م.ح = {٢}

تقويم

$2^{س+1} + 2^{س-1} = 5$

الجواب {١}

(١٤) $5^{س+1} + 5^{س-1} = 26$

الحل

$5^{س-1}(5^2 + 1) = 26$

$5^{س-1} \times 26 = 26$

$5^{س-1} = 1$

$س - 1 = صفر$

$\Leftarrow$ $س = 1$

ط٢ح

$5^{س}(5^1 + 5^{-1}) = 26$

$5^{س} \times (5 + \frac{1}{5}) = 26$

$5^{س} \times \frac{26}{5} = 26$

$5^{س} = 5$

$\Leftarrow$ $س = 1$

م.ح = {١}

(١٥) $3^{2س-3} \times 2^{4س-6} = 1$

الحل

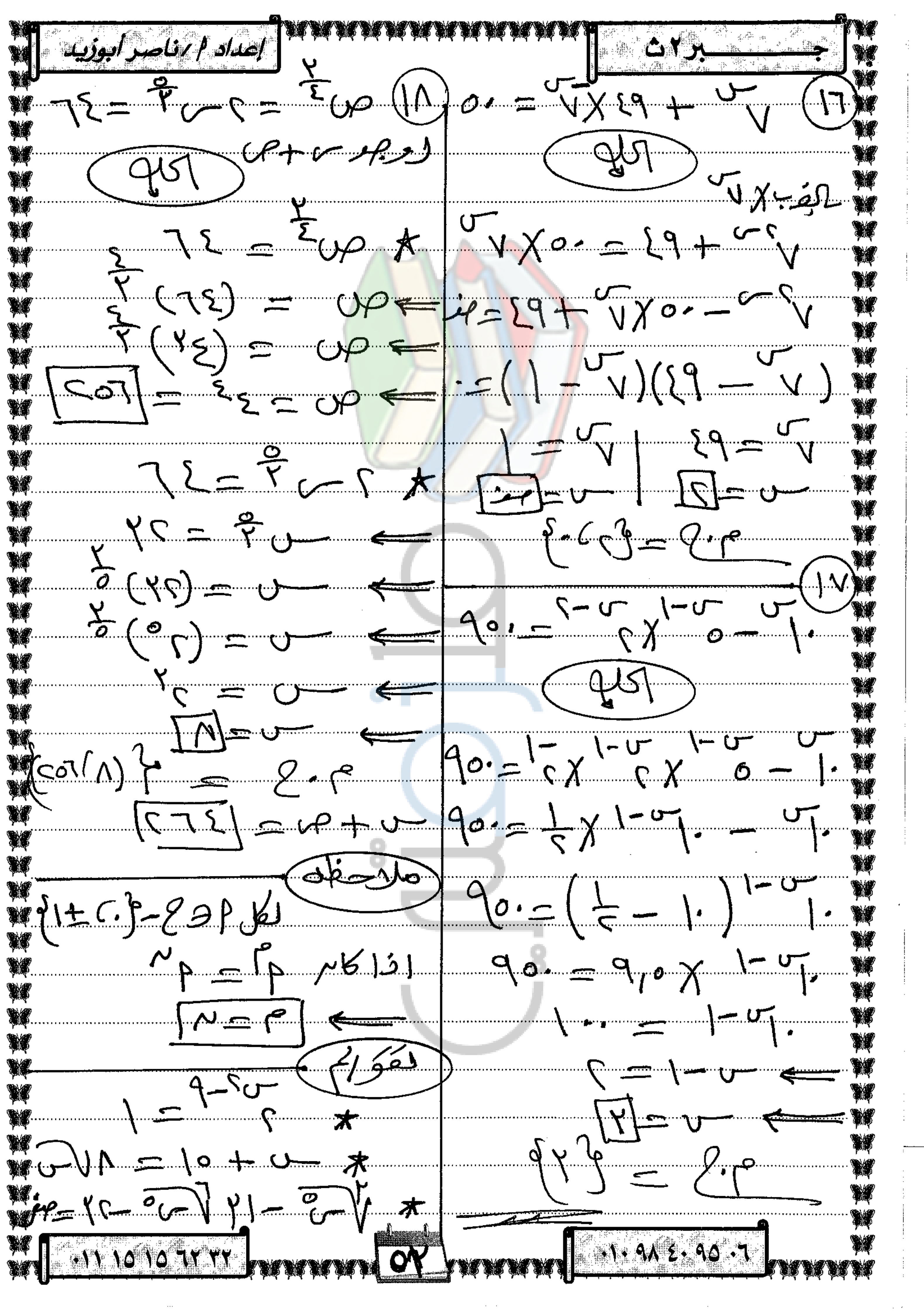
$3^{2س-3} \times 2^{2(2س-3)} = 1$

$3^{2س-3} \times 4^{2س-3} = 1$

$(12)^{2س-3} = 1$

$\Leftarrow$ $2س - 3 = صفر$

$\Leftarrow$ $س = \frac{3}{2}$



(١٦) $7^{س} + 49 \times 7^{-س} = 50$

الحل

بالضرب × $7^{س}$

$7^{2س} + 49 = 50 \times 7^{س}$

$7^{2س} - 50 \times 7^{س} + 49 = صفر$

$(7^{س} - 49)(7^{س} - 1) = 0$

$7^{س} = 49$ | $7^{س} = 1$

س = 2 | س = صفر

م.ح = {٢ ، ٠}

(١٧) $10^{س} - 5^{س-1} \times 2^{س-2} = 950$

الحل

$10^{س} - 5^{س-1} \times 2^{س-1} \times 2^{-1} = 950$

$10^{س} - 10^{س-1} \times \frac{1}{2} = 950$

$10^{س-1}\left(10 - \frac{1}{2}\right) = 950$

$10^{س-1} \times 9.5 = 950$

$10^{س-1} = 100$

⟸ س − ١ = ٢

⟸ س = ٣

م.ح = {٣}

(١٨) $ص^{\frac{3}{4}} = 2 س^{\frac{5}{2}} = 64$ أوجد س + ص

الحل

* $ص^{\frac{3}{4}} = 64$

ص ⟸ $= (64)^{\frac{4}{3}}$

ص ⟸ $= (4^{3})^{\frac{4}{3}}$

ص ⟸ $= 4^{4} = 256$

* $2 س^{\frac{5}{2}} = 64$

⟸ $س^{\frac{5}{2}} = 32$

⟸ س $= (32)^{\frac{2}{5}}$

⟸ س $= (2^{5})^{\frac{2}{5}}$

⟸ س $= 2^{2}$

⟸ س = ٨

م.ح = {(٨ ، ٢٥٦)}

س + ص = ٢٦٤

ملاحظة

لكل أ ∈ ح − {٠ ، ±١}

إذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$

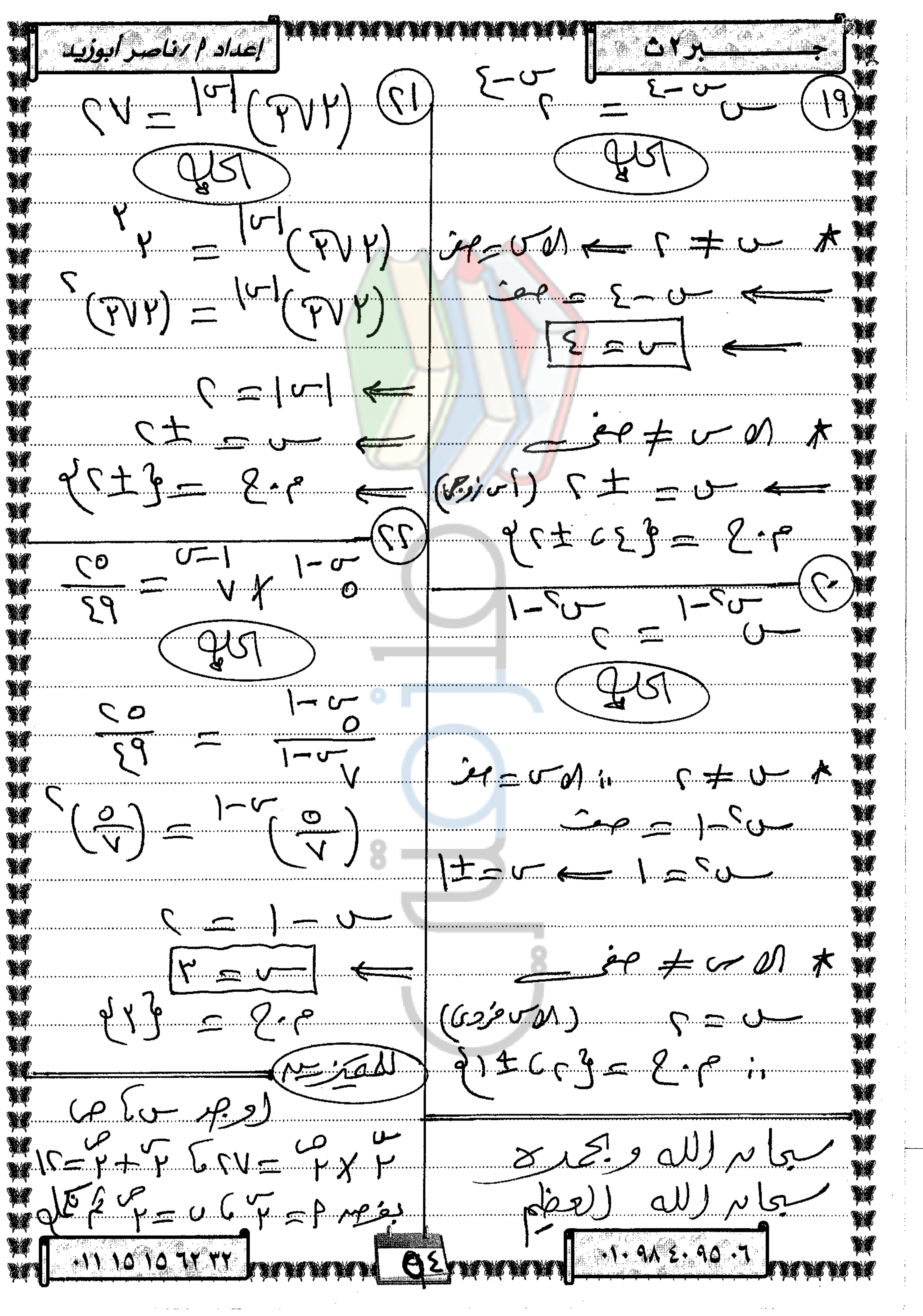
⟸ م = ن

[illegible]

* $2^{س^{2} - 9} = 1$

* $س + 10 = 7\sqrt{س}$

* $\sqrt[3]{س^{5}} - 21\sqrt[6]{س^{5}} - 22 = صفر$



إعداد م/ ناصر أبوزيد

(١٩) $س^{س-٤} = ٢^{س-٤}$

الحل

* $س \neq ٢ \Leftarrow$ الأس = صفر

$\Leftarrow س - ٤ =$ صفر

$\Leftarrow \boxed{س = ٤}$

* الأس ≠ صفر

$\Leftarrow س = \pm ٢$ (الأس زوجي)

م.ح = $\{٤ ، \pm ٢\}$

(٢٠) $س^{س^٢-١} = ٢^{س^٢-١}$

الحل

* $س \neq ٢$ ∴ الأس = صفر

$س^٢ - ١ =$ صفر

$س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

* الأس ≠ صفر

$س = ٢$ (الأس فردي)

∴ م.ح = $\{٢ ، \pm ١\}$

سبحان الله وبحمده
سبحان الله العظيم

(٢١) $(٢\sqrt{٢})^{|س|} = ٨$

الحل

$(٢\sqrt{٢})^{|س|} = ٢^٣$

$(٢\sqrt{٢})^{|س|} = (٢\sqrt{٢})^٢$

$\Leftarrow |س| = ٢$

$\Leftarrow س = \pm ٢$

$\Leftarrow$ م.ح = $\{\pm ٢\}$

(٢٢) $٥^{س-١} \times ٧^{١-س} = \frac{٢٥}{٤٩}$

الحل

$\frac{٥^{س-١}}{٧^{س-١}} = \frac{٢٥}{٤٩}$

$\left(\frac{٥}{٧}\right)^{س-١} = \left(\frac{٥}{٧}\right)^٢$

$س - ١ = ٢$

$\Leftarrow \boxed{س = ٣}$

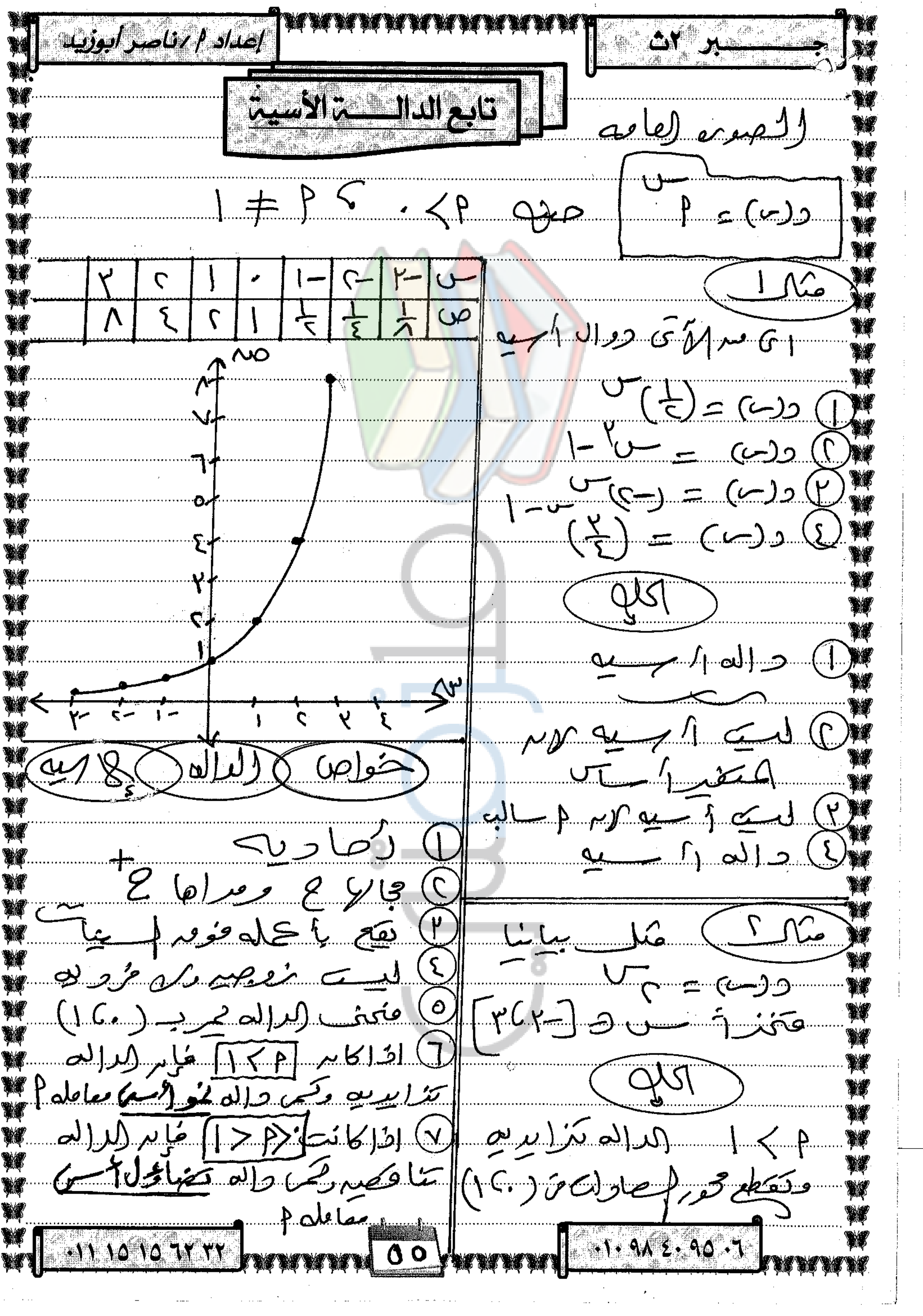
م.ح = $\{٣\}$

للمتميزين

أوجد س ، ص

$٣^س \times ٢^ص = ٢٧$ ، $٣^س + ٢^ص = ١٢$

بفرض م = $٣^س$ ، ن = $٢^ص$ ثم أكمل



تابع الدالة الأسية

الصورة العامة

$د(س) = أ^{س}$ حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١

مثال ١

أي من الآتي دوال أسية

1. $د(س) = (\frac{1}{2})^{س}$
2. $د(س) = س^{2} - 1$
3. $د(س) = (-2)^{س}$
4. $د(س) = (\frac{3}{4})^{س-1}$

الحل

1. دالة أسية
2. ليست أسية لأن المتغير أساس
3. ليست أسية لأن أ سالب
4. دالة أسية

مثال ٢

مثل بيانيا $د(س) = ٢^{س}$ في الفترة س ∈ [-٣ ، ٣]

الحل

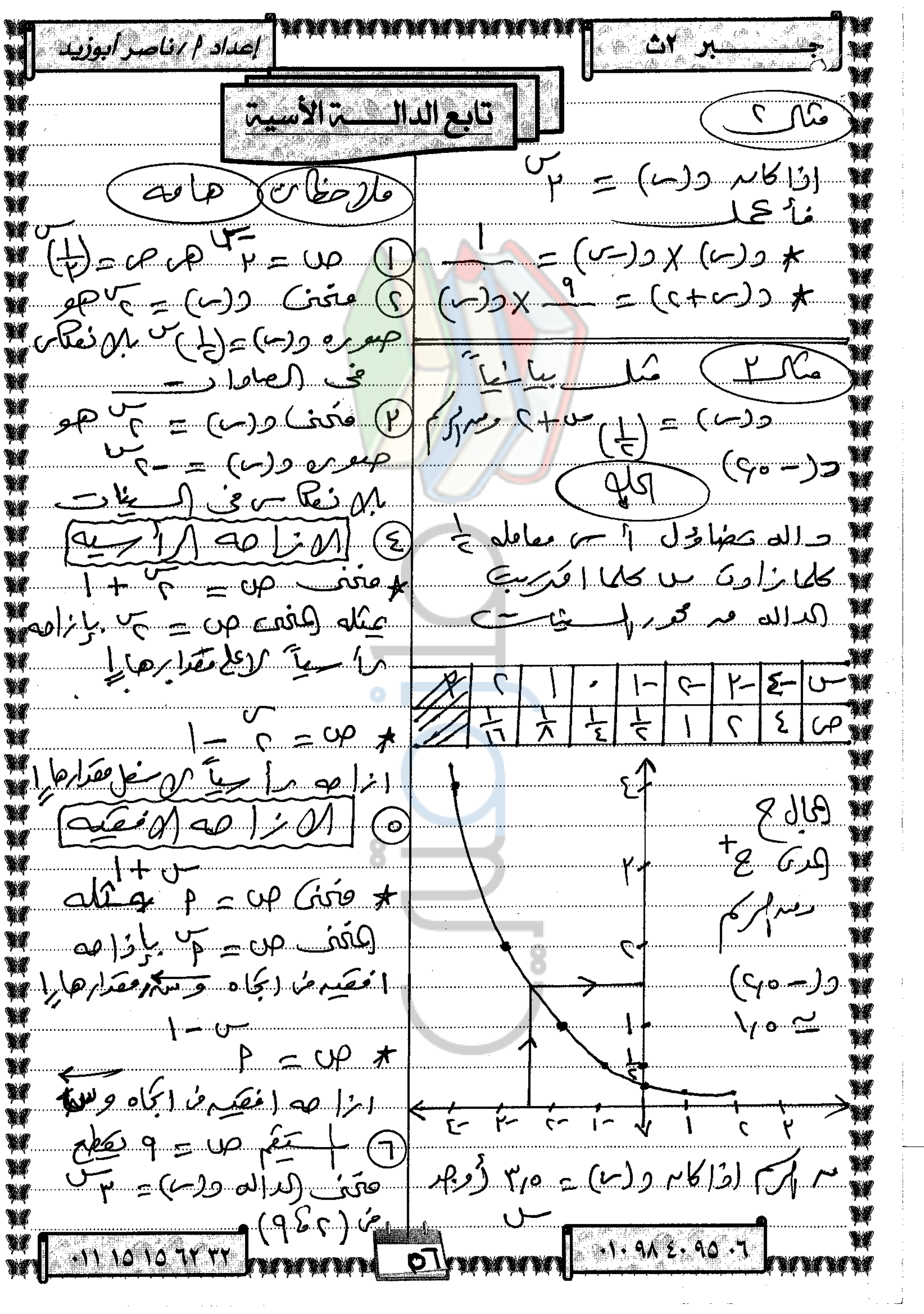
أ > ١ الدالة تزايدية

وتقطع محور الصادات في (٠ ، ١)

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤	٨

خواص الدالة الأسية

1. أحادية
2. مجالها ح ومداها $ح^{+}$
3. تقع بأكملها فوق محور السينات
4. ليست زوجية ولا فردية
5. منحنى الدالة يمر بـ (٠ ، ١)
6. إذا كانت أ > ١ فإن الدالة تزايدية وتسمى دالة نمو أسي معامله أ
7. إذا كانت ٠ < أ < ١ فإن الدالة تناقصية وتسمى دالة تضاؤل أسي معامله أ



إعداد أ / ناصر أبوزيد

تابع الدالة الأسية

مثال ١

إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ فأوجد

* د(س) × د(−س) = $\frac{١}{...}$
* د(س+٢) = $\frac{٩}{...}$ × د(س)

مثال ٢

مثل بيانياً د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س+٢}$ ومن الرسم د(−٠,٥)

الحل

دالة تناقص لأن معاملة $\frac{١}{٢}$ كلما زادت س كلما اقتربت الدالة من محور السينات

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢
ص	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{١٦}$

المجال ح

المدى $ح^{+}$

ومن الرسم

د(−٠,٥) = ١,٥

من الرسم إذا كانت د(س) = ٣,٥ أوجد س

ملاحظات هامة

١) ص = $٢^{-س}$ هي ص = $(\frac{١}{٢})^{س}$

٢) منحنى د(س) = $٢^{س}$ هو صورة د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ بالانعكاس في الصادات

٣) منحنى د(س) = $٢^{س}$ هو صورة د(س) = $-٢^{س}$ بالانعكاس في السينات

٤) **الإزاحة الرأسية**

* منحنى ص = $٢^{س}$ + ١ يمثله المنحنى ص = $٢^{س}$ بإزاحة رأسياً لأعلى مقدارها ١
* ص = $٢^{س}$ − ١ إزاحة رأسياً لأسفل مقدارها ١

٥) **الإزاحة الأفقية**

* منحنى ص = $٢^{س+١}$ يمثله منحنى ص = $٢^{س}$ بإزاحة أفقية في اتجاه ← ومقدارها ١
* ص = $٢^{س-١}$ إزاحة أفقية في اتجاه → ومقدارها ١

٦) المستقيم ص = ٩ يقطع منحنى الدالة د(س) = $٣^{س}$ في (٢، ٩)



تابع الدالة الأسية

تطبيقات هامة

النمو الأسي

$د(ن) = أ(1 + ر)^{ن}$

* أ القيمة الابتدائية
* ر النسبة المئوية
* ن الفترة الزمنية

التضاؤل الأسي

$د(ن) = أ(1 - ر)^{ن}$

الربح المركب

$د(ن) = أ\left(1 + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

حيث ر الربح المركب

س عدد فترات تقسيم العائد السنوي

مثال

سيتكاثر النحل من أحد الخلايا فيزداد بمعدل ٢٥٪ كل أسبوع وكان عدد النحل من البداية ٦٠ نحلة

اكتب دالة أسية تقدر عدد النحل بعد ن أسبوع ثم قدر العدد بعد ٦ أسابيع

الحل

$د(ن) = ٦٠(١ + ٠٫٢٥)^{ن}$

$= ٦٠(١٫٢٥)^{ن}$ ← الدالة

بعد ٦ أسابيع

عدد النحل $= ٦٠(١٫٢٥)^{٦}$

$\simeq ٢٢٩$ نحلة

مثال ٦

اشترى كريم سيارة بمبلغ ١٢٠٠٠٠ج وكان سعر السيارة يتناقص بمعدل ١٢٪ كل سنة

* اكتب دالة تمثل السعر بعد ن سنة
* قدر سعر السيارة

الحل

$هـ(ن) = أ(1 - ر)^{ن}$

$أ = ١٢٠٠٠٠$ ، $ر = ٠٫١٢$

$هـ(ن) = ١٢٠٠٠٠(١ - ٠٫١٢)^{ن}$

$= ١٢٠٠٠٠(٠٫٨٨)^{ن}$

بعد ٦ سنوات

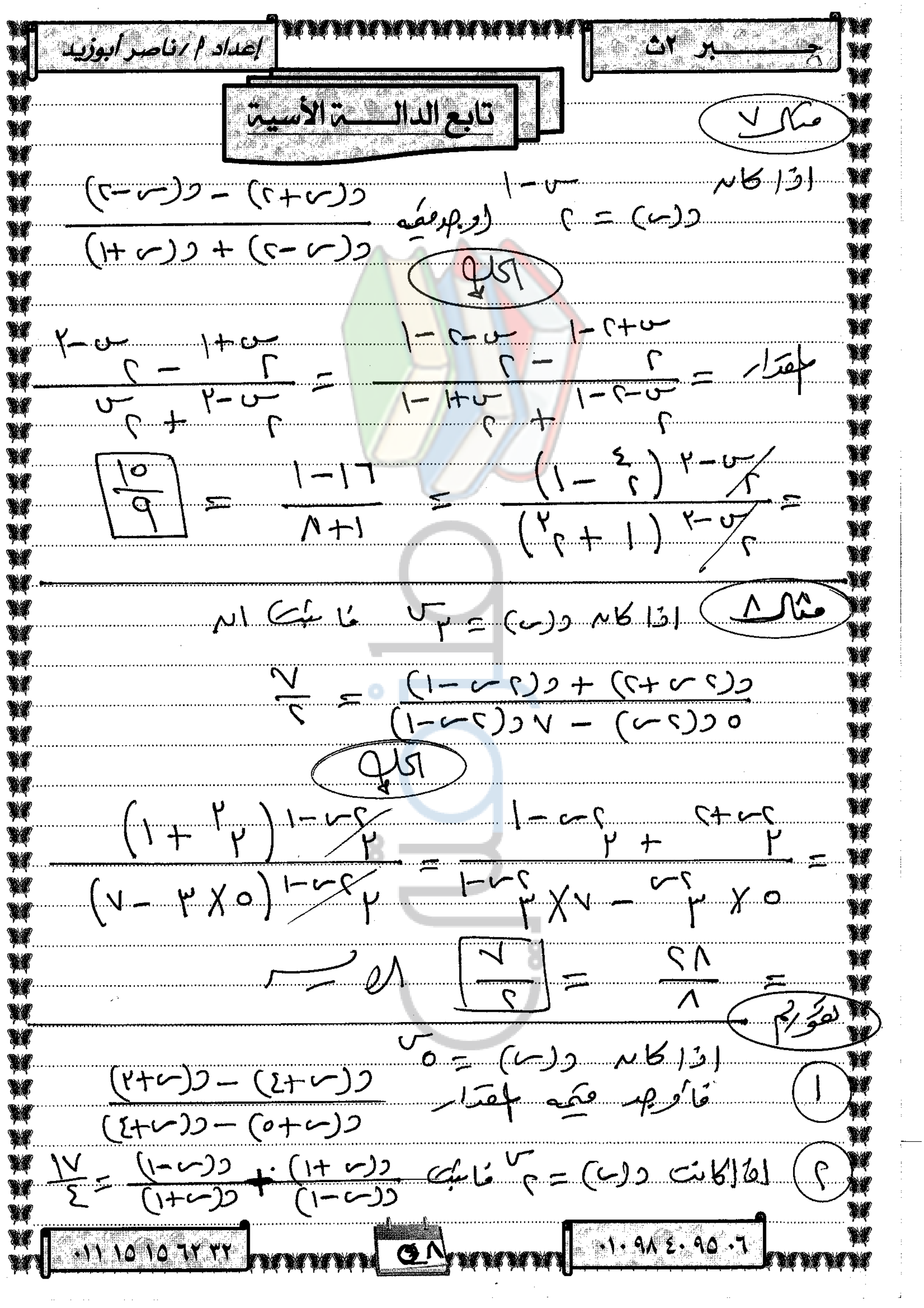
ثمن السيارة $= ١٢٠٠٠٠(٠٫٨٨)^{٦}$

$\simeq ٥٥٧٢٨$ج

تقويم

بلغ سكان محافظة ٤٫٦ مليون بزيادة سنوية ٤٪

* اكتب دالة تمثل ذلك
* قدر عدد السكان بعد ٥ سنوات



تابع الدالة الأسية

مثال ٧

إذا كان $د(س) = ٢^{س-١}$ أوجد قيمة

$$\frac{د(س+٢) - د(س-٢)}{د(س-٢) + د(س+١)}$$

الحل

$$المقدار = \frac{٢^{س+٢-١} - ٢^{س-٢-١}}{٢^{س-٢-١} + ٢^{س+١-١}} = \frac{٢^{س+١} - ٢^{س-٣}}{٢^{س-٣} + ٢^{س}}$$

$$= \frac{٢^{س-٣}(٢^{٤} - ١)}{٢^{س-٣}(١ + ٢^{٣})} = \frac{١٦-١}{٨+١} = \boxed{\frac{١٥}{٩}}$$

مثال ٨

إذا كان $د(س) = ٣^{س}$ فاثبت أن

$$\frac{د(٢س+٢) + د(٢س-١)}{٥\,د(٢س) - ٧\,د(٢س-١)} = \frac{٧}{٢}$$

الحل

$$= \frac{٣^{٢س+٢} + ٣^{٢س-١}}{٥ \times ٣^{٢س} - ٧ \times ٣^{٢س-١}} = \frac{٣^{٢س-١}(٣^{٣} + ١)}{٣^{٢س-١}(٥ \times ٣ - ٧)}$$

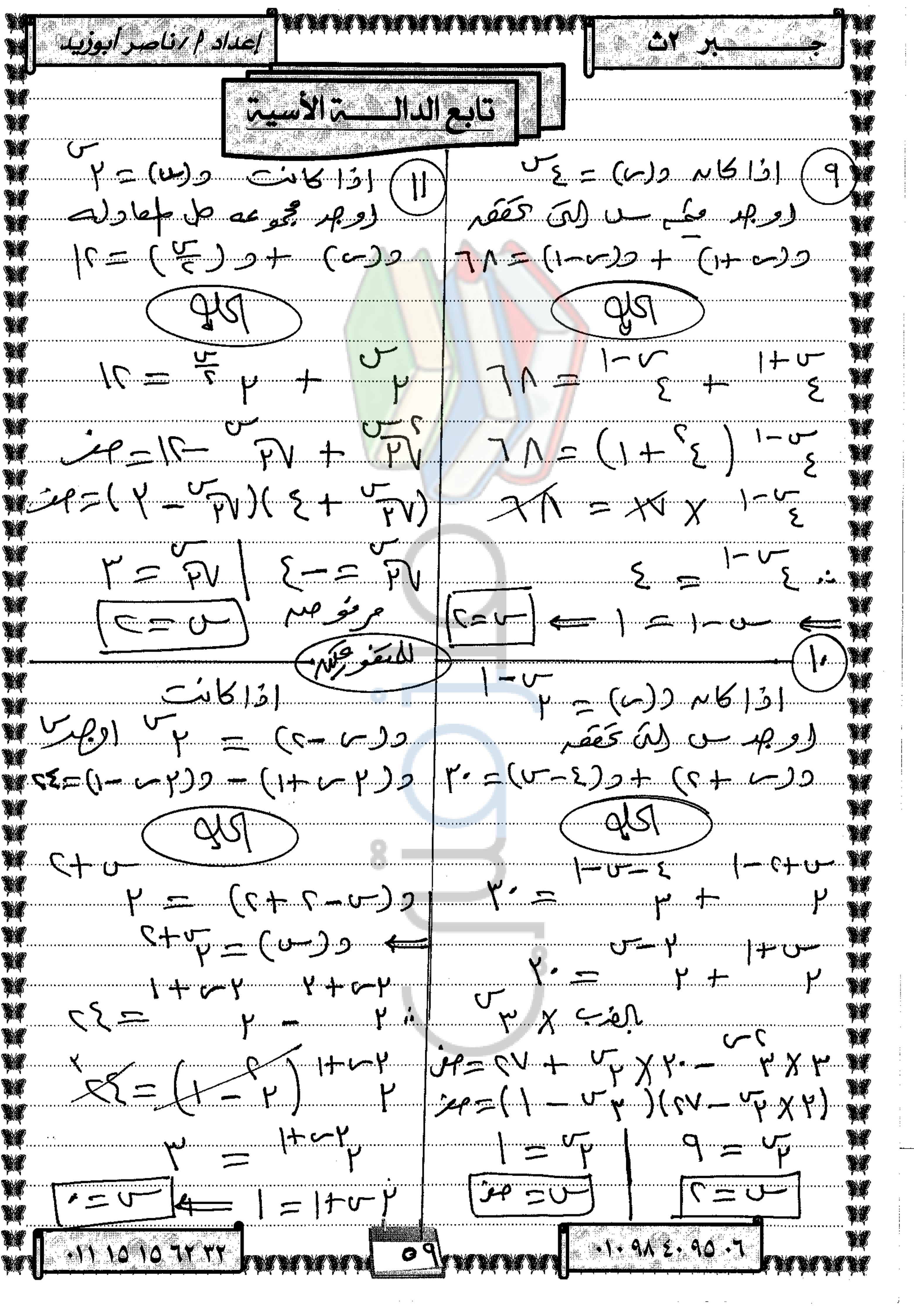
$$= \frac{٢٨}{٨} = \boxed{\frac{٧}{٢}}$$ م.ط

تقويم

١) إذا كان $د(س) = ٥^{س}$ فأوجد قيمة المقدار

$$\frac{د(س+٤) - د(س+٢)}{د(س+٥) - د(س+٤)}$$

٢) إذا كانت $د(س) = ٢^{س}$ فاثبت أن $\frac{د(س+١)}{د(س-١)} + \frac{د(س-١)}{د(س+١)} = \frac{١٧}{٤}$



تابع الدالة الأسية

(٩) اذا كان $د(س) = ٤^{س}$ اوجد قيمة س التي تحقق $د(س+١) + د(س-١) = ٦٨$

الحل

$٤^{س+١} + ٤^{س-١} = ٦٨$

$٤^{س-١}(٤^{٢}+١) = ٦٨$

$٦٨ = ١٧ \times ٤^{س-١}$

$\therefore ٤^{س-١} = ٤$

$\Leftarrow س - ١ = ١ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

(١٠) اذا كان $د(س) = ٣^{س-١}$ اوجد س التي تحقق $د(س+٢) + د(٤-س) = ٣٠$

الحل

$٣^{س+٢-١} + ٣^{٤-س-١} = ٣٠$

$٣^{س+١} + ٣^{٣-س} = ٣٠$

بالضرب $\times ٣^{س}$

$٣ \times ٣^{٢س} - ٣٠ \times ٣^{س} + ٢٧ = صفر$

$(٣ \times ٣^{س} - ٢٧)(٣^{س} - ١) = صفر$

$٣^{س} = ٩$ ⟸ $\boxed{س = ٢}$ | $٣^{س} = ١$ ⟸ $\boxed{س = صفر}$

(١١) اذا كانت $د(س) = ٣^{س}$ اوجد مجموعة حل المعادلة $د(س) + د(\frac{س}{٢}) = ١٢$

الحل

$٣^{س} + ٣^{\frac{س}{٢}} = ١٢$

$(\sqrt{٣})^{٢س} + (\sqrt{٣})^{س} - ١٢ = صفر$

$((\sqrt{٣})^{س} + ٤)((\sqrt{٣})^{س} - ٣) = صفر$

$(\sqrt{٣})^{س} = -٤$ مرفوض | $(\sqrt{٣})^{س} = ٣$

$\boxed{س = ٢}$

للتفوق

اذا كانت $د(س-٢) = ٣^{س}$ اوجد س التي تحقق $د(٢س+١) - د(٢س-١) = ٢٤$

الحل

$د(س-٢+٢) = ٣^{س+٢}$

$\Leftarrow د(س) = ٣^{س+٢}$

$\therefore ٣^{٢س+٣} - ٣^{٢س+١} = ٢٤$

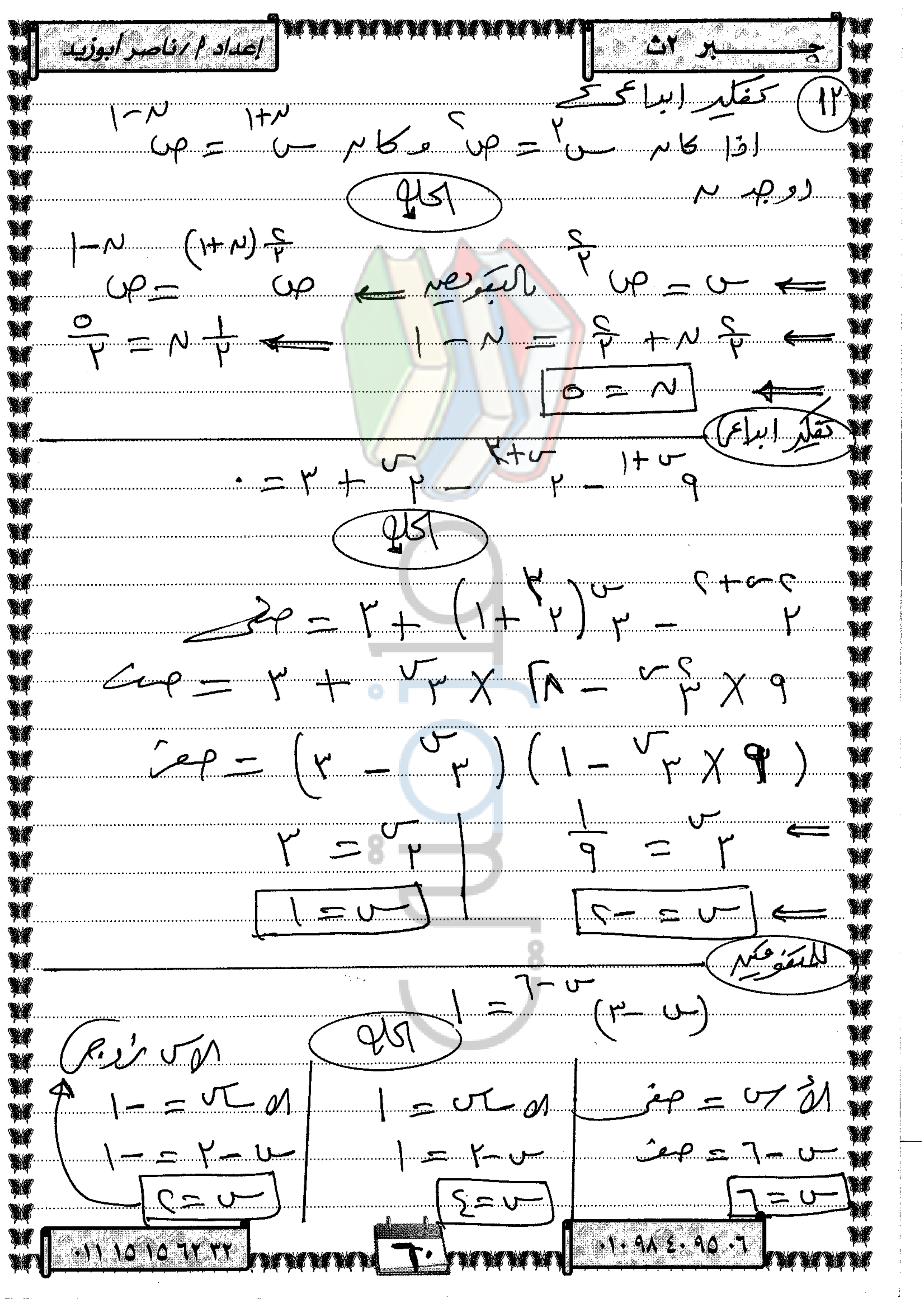
$٣^{٢س+١}(٣^{٢} - ١) = ٢٤$

$٣^{٢س+١} = ٣$

$٢س + ١ = ١ \Leftarrow \boxed{س = ٠}$

٠١١١٥١٥٦٢٣٢

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



(١٢) تفكير ابداعي

إذا كان $س^{٢} = ص^{٣}$ ، كان $س^{ن+١} = ص^{ن-١}$

أوجد ن

الحل

$\Leftarrow س = ص^{\frac{٣}{٢}}$ بالتعويض $\leftarrow ص^{\frac{٣}{٢}(ن+١)} = ص^{ن-١}$

$\Leftarrow \frac{٣}{٢}ن + \frac{٣}{٢} = ن - ١ \Leftarrow \frac{١}{٢}ن = \frac{-٥}{٢}$

$\Leftarrow$ $\boxed{ن = -٥}$

تفكير ابداعي

$٩^{س+١} - ٣^{س+٣} - ٣^{س} + ٣ = ٠$

الحل

$٣^{٢س+٢} - ٣^{س}(٣^{٣}+١) + ٣ = صفر$

$٩ \times ٣^{٢س} - ٢٨ \times ٣^{س} + ٣ = صفر$

$(٩ \times ٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٣) = صفر$

$\Leftarrow ٣^{س} = \frac{١}{٩}$ | $٣^{س} = ٣$

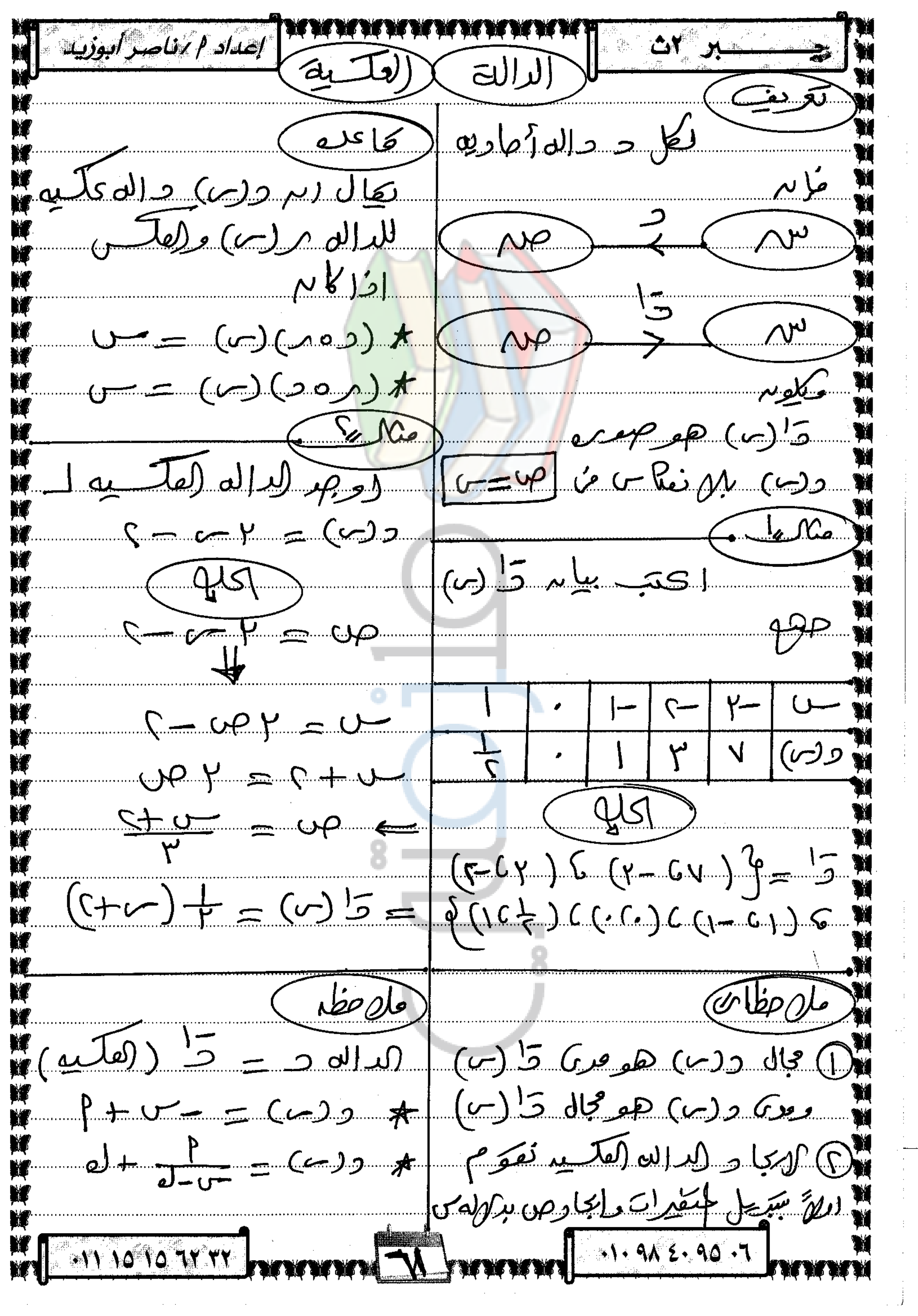
$\Leftarrow \boxed{س = -٢}$ | $\boxed{س = ١}$

للتفوق

$(س-٣)^{س-٦} = ١$

الحل

الأس = صفر	الأساس = ١	الأساس = −١
س − ٦ = صفر	س − ٣ = ١	س − ٣ = −١
س = ٦	س = ٤	س = ٢ (الأس زوجي)



الدالة العكسية

تعريف

لكل د دالة أحادية

فإن

س ⟵ د ⟵ ص

س ⟵ $د^{-1}$ ⟵ ص

وتكون

$د^{-1}(س)$ هو صورة د(س) بالانعكاس في ص = س

مثال ١

اكتب بيان $د^{-1}(س)$

حيث

س	٣-	٢-	١-	٠	١
د(س)	٧	٣	١	٠	$\frac{1}{2}$

الحل

$د^{-1}$ = {(٧ ، ٣-) ، (٣ ، ٢-) ، (١ ، ١-) ، (٠ ، ٠) ، ($\frac{1}{2}$ ، ١)}

قاعدة

يقال أن $د^{-1}(س)$ دالة عكسية للدالة د(س) والعكس إذا كان

★ (د ∘ $د^{-1}$)(س) = س

★ ($د^{-1}$ ∘ د)(س) = س

مثال ٢

أوجد الدالة العكسية لـ د(س) = ٣س − ٢

الحل

ص = ٣س − ٢

⇓

س = ٣ص − ٢

س + ٢ = ٣ص

⟸ ص = $\frac{س + ٢}{٣}$

⟸ $د^{-1}(س)$ = $\frac{1}{3}$(س + ٢)

ملاحظات

١) مجال د(س) هو مدى $د^{-1}(س)$ ومدى د(س) هو مجال $د^{-1}(س)$

٢) لإيجاد الدالة العكسية نقوم أولاً بتبديل المتغيرات وإيجاد ص بدلالة س

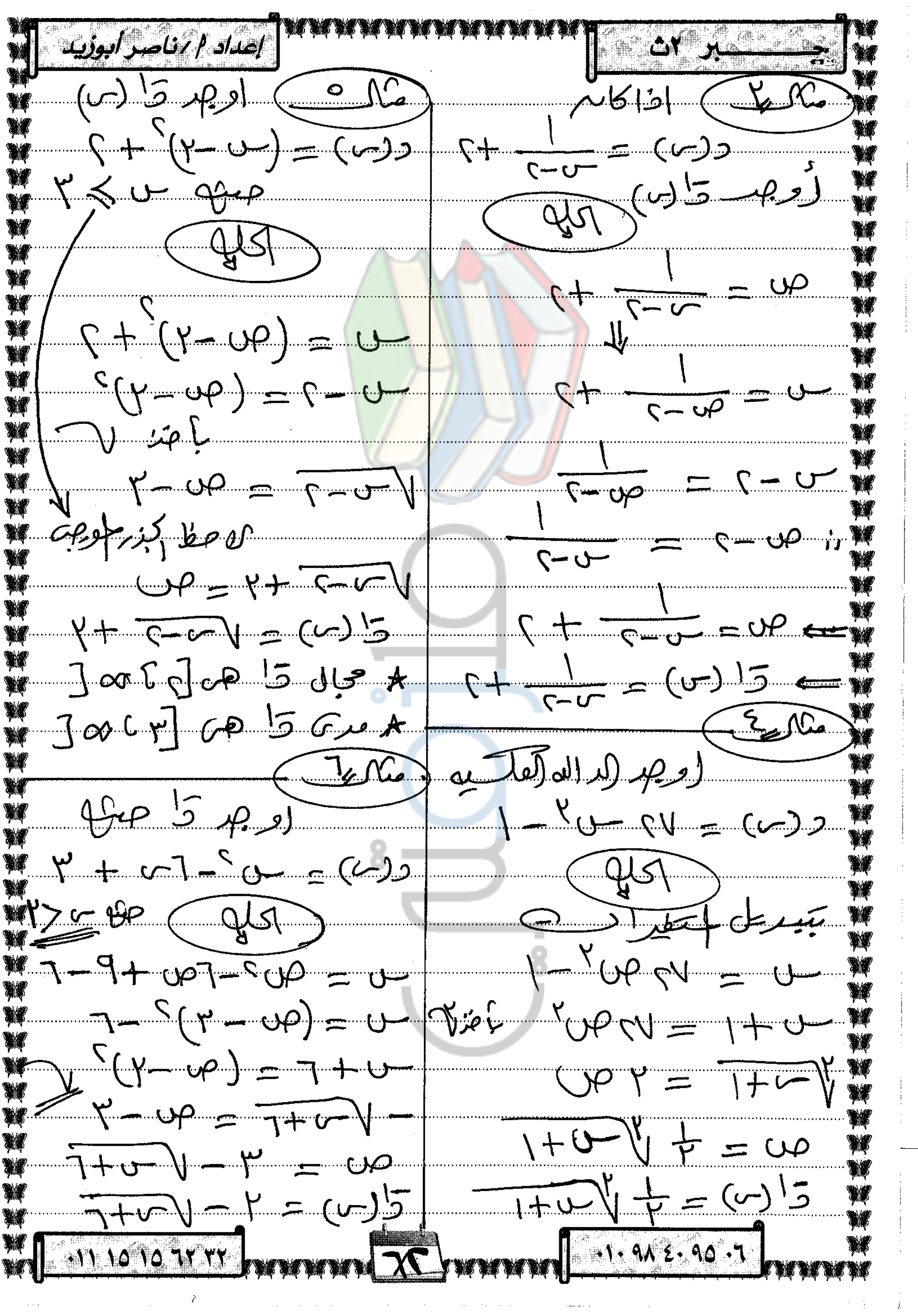
ملاحظة

الدالة د = $د^{-1}$ (العكسية)

★ د(س) = −س + أ

★ د(س) = $\frac{أ}{س - ك}$ + ك

إعداد أ/ ناصر أبوزيد



مثال

إذا كانت $د(س) = \frac{1}{س - ٢} + ٢$

أوجد $د^{-1}(س)$

الحل

$ص = \frac{1}{س - ٢} + ٢$

⇓

$س = \frac{1}{ص - ٢} + ٢$

$س - ٢ = \frac{1}{ص - ٢}$

$\therefore ص - ٢ = \frac{1}{س - ٢}$

$\Leftarrow ص = \frac{1}{س - ٢} + ٢$

$\Leftarrow د^{-1}(س) = \frac{1}{س - ٢} + ٢$

مثال ٤

أوجد الدالة العكسية

$د(س) = ٢٧ س^{٣} - ١$

الحل

بتبديل المتغيرات

$س = ٢٧ ص^{٣} - ١$

$س + ١ = ٢٧ ص^{٣}$

$\sqrt[٣]{س + ١} = ٣ ص$

$ص = \frac{1}{٣} \sqrt[٣]{س + ١}$

$د^{-1}(س) = \frac{1}{٣} \sqrt[٣]{س + ١}$

مثال ٥

أوجد $د^{-1}(س)$

$د(س) = (س - ٣)^{٢} + ٢$ حيث $س \geq ٣$

الحل

$س = (ص - ٣)^{٢} + ٢$

$س - ٢ = (ص - ٣)^{٢}$

بأخذ $\sqrt{}$

$\sqrt{س - ٢} = ص - ٣$

لاحظ الجذر موجب

$ص = ٣ + \sqrt{س - ٢}$

$د^{-1}(س) = \sqrt{س - ٢} + ٣$

★ مجال $د^{-1}$ هو $[٢ ، \infty[$

★ مدى $د^{-1}$ هو $[٣ ، \infty[$

مثال ٦

أوجد $د^{-1}$ حيث

$د(س) = س^{٢} - ٦س + ٣$

حيث $س \leq ٣$

الحل

$س = ص^{٢} - ٦ص + ٩ - ٦$

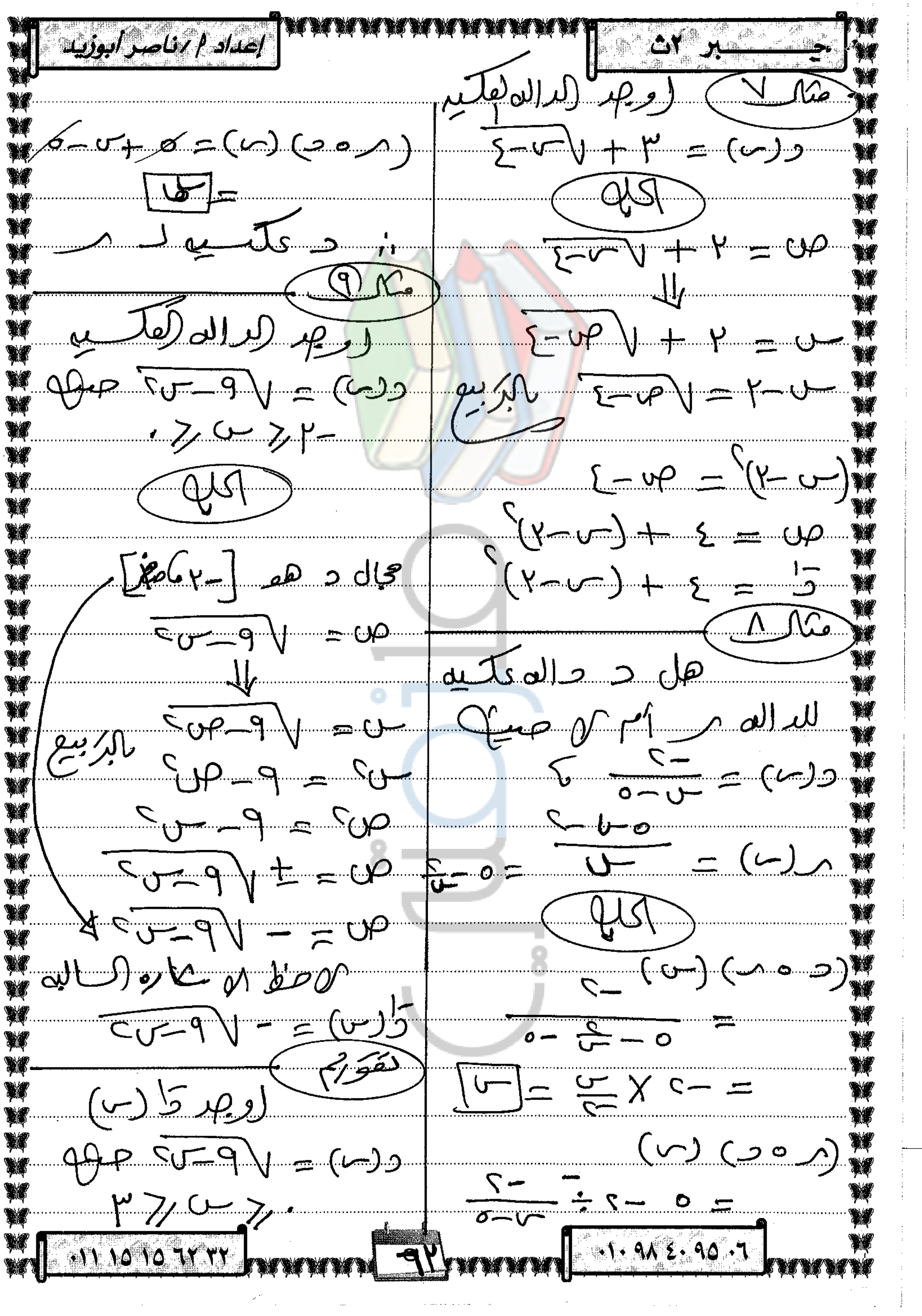
$س = (ص - ٣)^{٢} - ٦$ أخذ $\sqrt{}$

$س + ٦ = (ص - ٣)^{٢}$

$-\sqrt{س + ٦} = ص - ٣$

$ص = ٣ - \sqrt{س + ٦}$

$د^{-1}(س) = ٣ - \sqrt{س + ٦}$



مثال ٧ أوجد الدالة العكسية

$د(س) = ٣ + \sqrt{س - ٤}$

الحل

$ص = ٢ + \sqrt{س - ٤}$

$\Downarrow$

$س = ٢ + \sqrt{ص - ٤}$

$س - ٢ = \sqrt{ص - ٤}$ بالتربيع

$(س - ٢)^٢ = ص - ٤$

$ص = ٤ + (س - ٢)^٢$

$د^{-١} = ٤ + (س - ٢)^٢$

مثال ٨

هل د دالة عكسية للدالة ر أم لا حيث

$د(س) = \frac{-٢}{س - ٥}$ ،

$ر(س) = \frac{٥س - ٢}{س} = ٥ - \frac{٢}{س}$

الحل

$(د \circ ر)(س) = \frac{-٢}{٥ - \frac{٢}{س} - ٥}$

$= -٢ \times \frac{س}{٢} = \boxed{س}$

$(ر \circ د)(س)$

$= ٥ - ٢ \div \frac{-٢}{س - ٥}$

$(ر \circ د)(س) = ٥ + س - ٥ = \boxed{س}$

$\therefore$ د عكسية لـ ر

مثال ٩

أوجد الدالة العكسية

$د(س) = \sqrt{٩ - س^٢}$ حيث $-٢ \le س \le ٠$

الحل

مجال د هو $[-٢ ، ٠]$

$ص = \sqrt{٩ - س^٢}$

$\Downarrow$

$س = \sqrt{٩ - ص^٢}$ بالتربيع

$س^٢ = ٩ - ص^٢$

$ص^٢ = ٩ - س^٢$

$ص = \pm \sqrt{٩ - س^٢}$

$ص = - \sqrt{٩ - س^٢}$

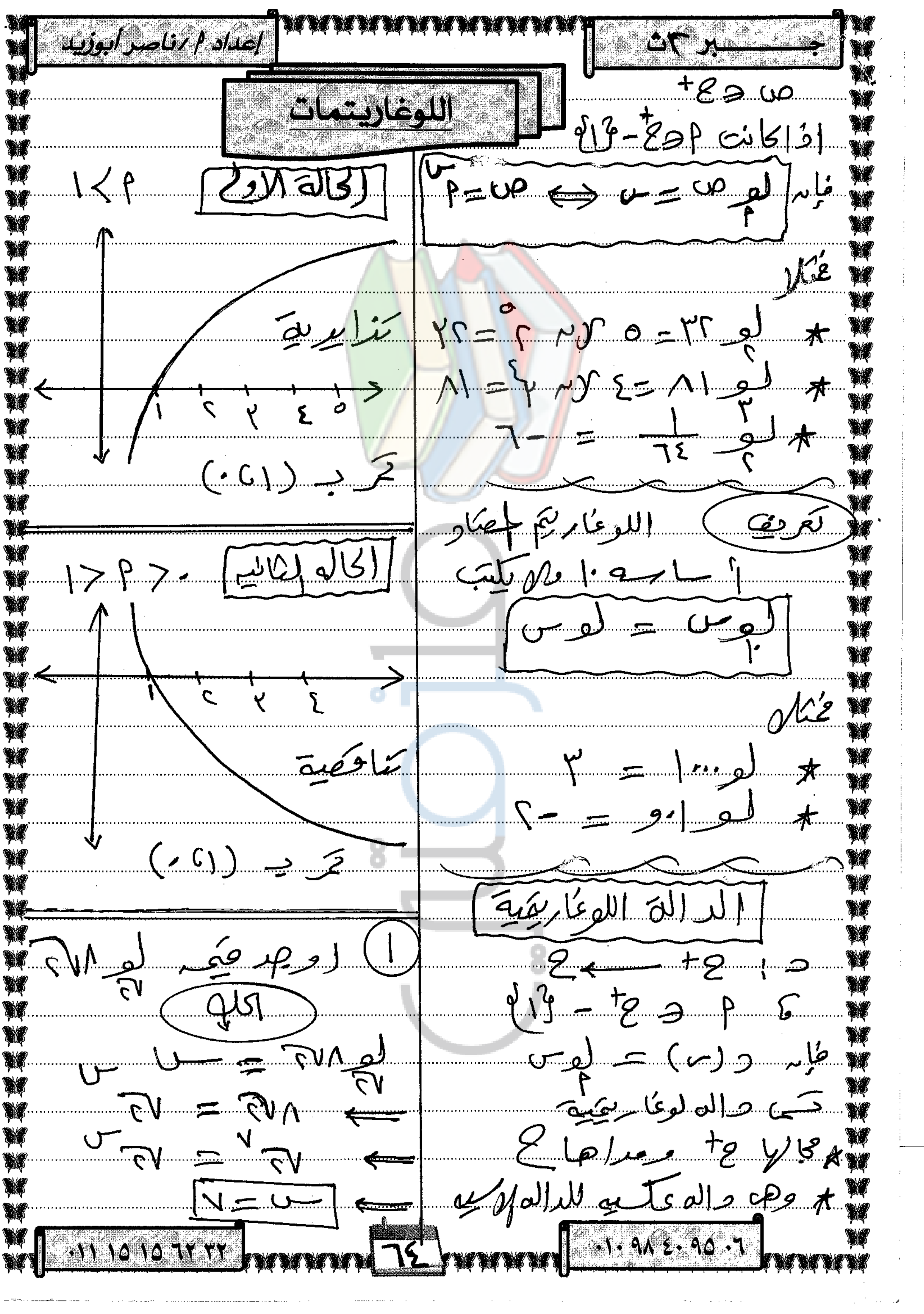
لاحظ الاشارة السالبة

$د^{-١}(س) = - \sqrt{٩ - س^٢}$

تقويم

أوجد $د^{-١}(س)$

$د(س) = \sqrt{٩ - س^٢}$ حيث $٠ \le س \le ٣$



اللوغاريتمات

ص ∈ ح⁺

إذا كانت م ∈ ح⁺ − {١}

فإن $لو_م ص = س \iff ص = م^س$

مثلا

* $لو_٢ ٣٢ = ٥$ لأن $٢^٥ = ٣٢$
* $لو_٣ ٨١ = ٤$ لأن $٣^٤ = ٨١$
* $لو_٢ \frac{١}{٦٤} = -٦$

تعريف اللوغاريتم المعتاد

أساسه ١٠ ولا يكتب

$لو_{١٠} ص = لو ص$

مثال

* $لو ١٠٠٠ = ٣$
* $لو ٠٫٠١ = -٢$

الدالة اللوغاريتمية

د : ح⁺ ⟵ ح

، م ∈ ح⁺ − {١}

فإن $د(س) = لو_م س$

تسمى دالة لوغاريتمية

* مجالها ح⁺ ومداها ح
* وهي دالة عكسية للدالة الأسية

الحالة الأولى

م > ١

تزايدية

تمر بـ (١ ، ٠)

الحالة الثانية

٠ < م < ١

تناقصية

تمر بـ (١ ، ٠)

① أوجد قيمة $لو_{\sqrt{٢}} ٨\sqrt{٢}$

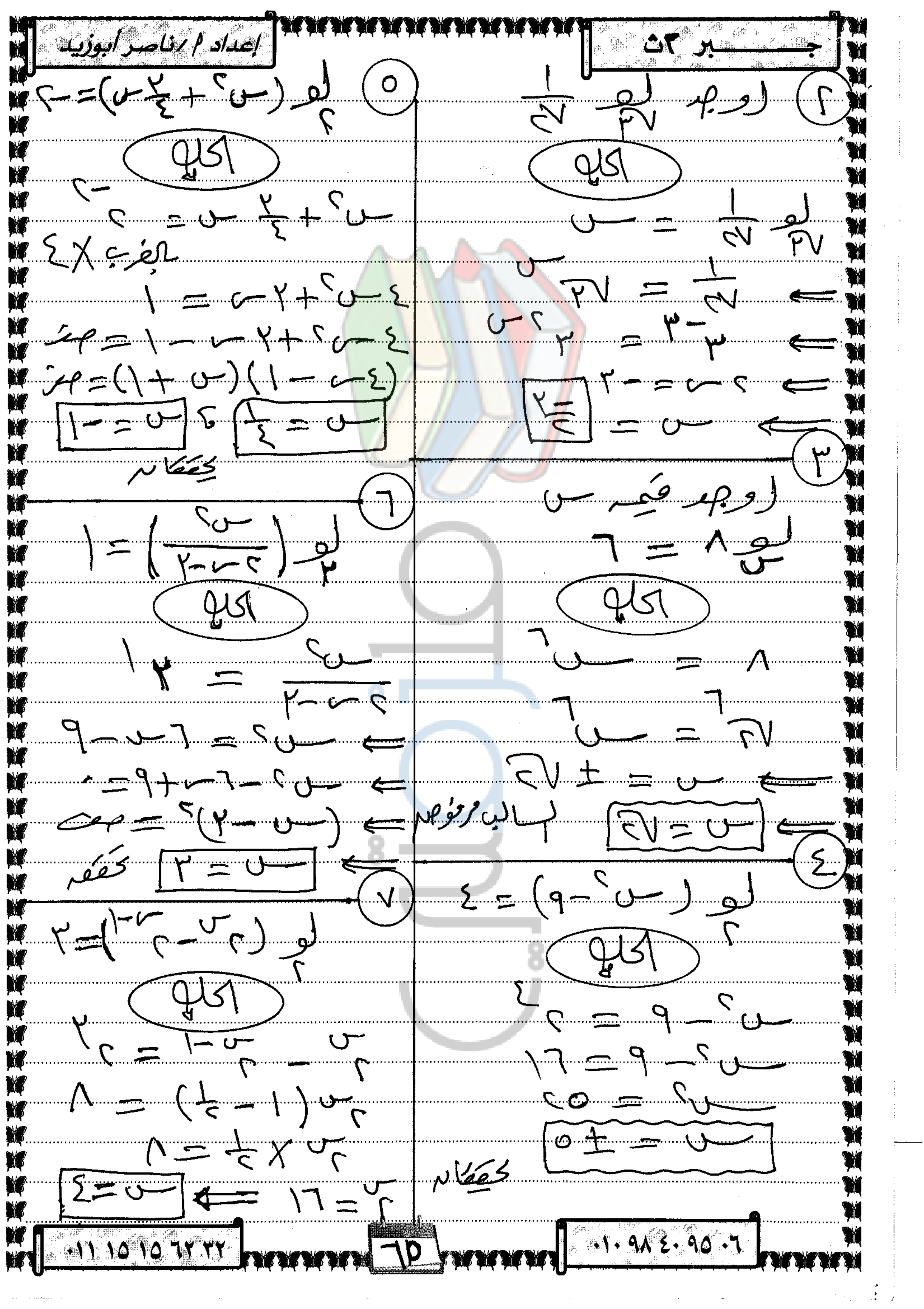
الحل

$لو_{\sqrt{٢}} ٨\sqrt{٢} = س$

⟸ $(\sqrt{٢})^س = ٨\sqrt{٢}$

⟸ $(\sqrt{٢})^س = (\sqrt{٢})^٧$

⟸ س = ٧



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

(٢) أوجد $لو_{\sqrt{٢٧}} \frac{١}{٢٧}$

الحل

$لو_{\sqrt{٢٧}} \frac{١}{٢٧} = س$

$\Leftarrow (\sqrt{٢٧})^{س} = \frac{١}{٢٧}$

$\Leftarrow ٣^{\frac{٣}{٢}س} = ٣^{-٣}$

$\Leftarrow \frac{٣}{٢}س = -٣$

$\Leftarrow$ $\boxed{س = -٢}$

(٣) أوجد قيمة س

$لو_{س} ٨ = ٦$

الحل

$٨ = س^{٦}$

$(\sqrt{٢})^{٦} = س^{٦}$

$\Leftarrow س = \pm \sqrt{٢}$

$\Leftarrow$ $\boxed{س = \sqrt{٢}}$ السالب مرفوض

(٤) $لو_{٢} (س^{٢} - ٩) = ٤$

الحل

$س^{٢} - ٩ = ٢^{٤}$

$س^{٢} - ٩ = ١٦$

$س^{٢} = ٢٥$

$\boxed{س = \pm ٥}$

يحققان

(٥) $لو_{٢} (س^{٢} + \frac{٣}{٤}س) = -٢$

الحل

$س^{٢} + \frac{٣}{٤}س = ٢^{-٢}$

بالضرب × ٤

$٤س^{٢} + ٣س = ١$

$٤س^{٢} + ٣س - ١ = صفر$

$(٤س - ١)(س + ١) = صفر$

$\boxed{س = \frac{١}{٤}}$ ، $\boxed{س = -١}$

يحققان

(٦) $لو_{٣} \left(\frac{س^{٢}}{٢س - ٣}\right) = ١$

الحل

$\frac{س^{٢}}{٢س - ٣} = ٣^{١}$

$\Leftarrow س^{٢} = ٦س - ٩$

$\Leftarrow س^{٢} - ٦س + ٩ = ٠$

$\Leftarrow (س - ٣)^{٢} = صفر$

$\Leftarrow$ $\boxed{س = ٣}$ يحقق

(٧) $لو_{٢} (٢^{س} - ٢^{س-١}) = ٣$

الحل

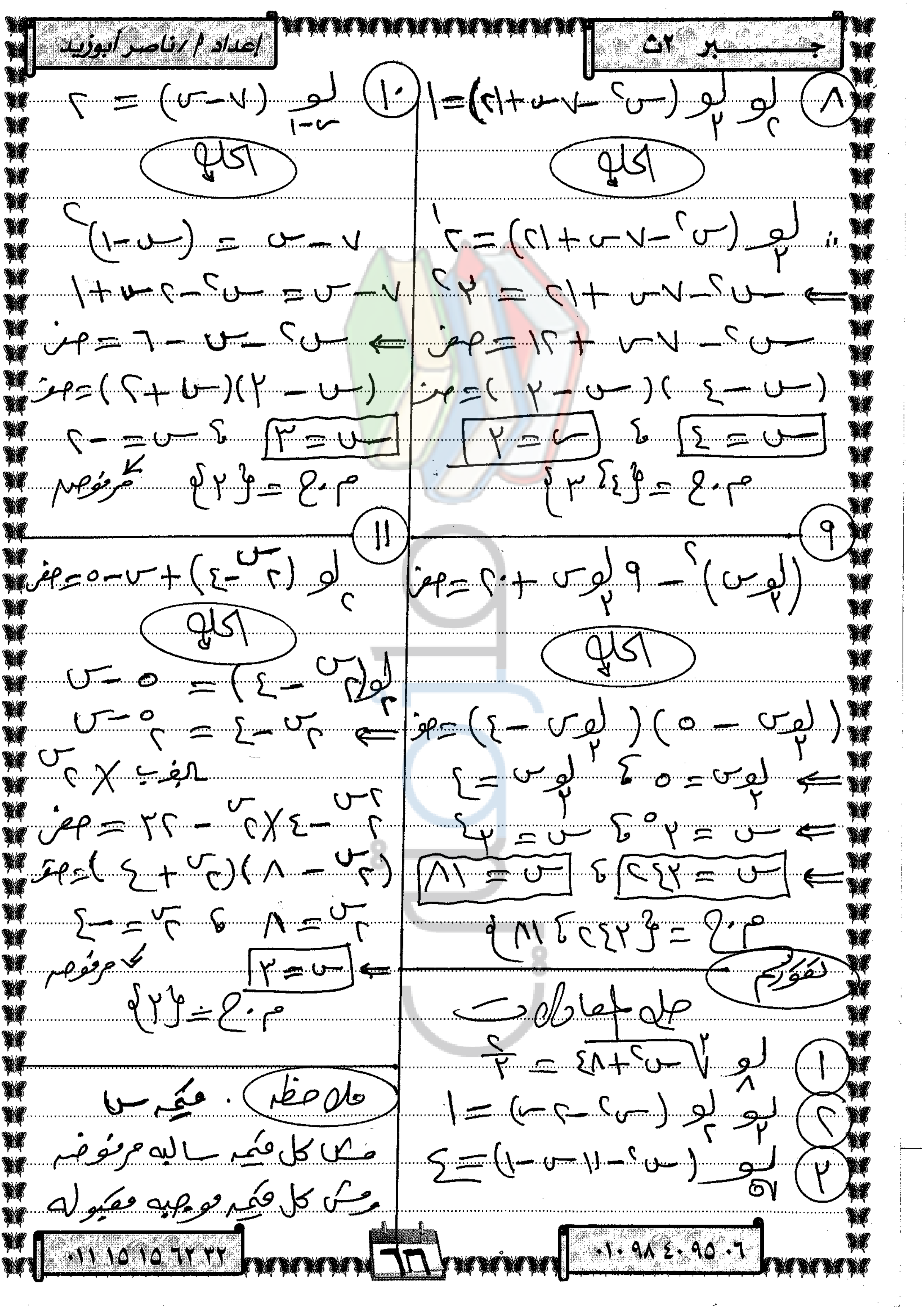
$٢^{س} - ٢^{س-١} = ٢^{٣}$

$٢^{س}(١ - \frac{١}{٢}) = ٨$

$٢^{س} \times \frac{١}{٢} = ٨$

$٢^{س} = ١٦ \Leftarrow$ $\boxed{س = ٤}$

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦
٠١١١٥١٥٦٢٣٢



(٨) لو$_2$ لو$_2$ (س^2 − ٧س + ٢١) = ١

الحل

∴ لو$_2$ (س^2 − ٧س + ٢١) = ٢^1

⇐ س^2 − ٧س + ٢١ = ٢^2

س^2 − ٧س + ١٢ = صفر

(س − ٤)(س − ٣) = صفر

س = ٤ ، س = ٣

م.ح = {٤ ، ٣}

(٩) (لو$_2$ س)^2 − ٩ لو$_2$ س + ٢٠ = صفر

الحل

(لو$_2$ س − ٥)(لو$_2$ س − ٤) = صفر

⇐ لو$_2$ س = ٥ ، لو$_2$ س = ٤

⇐ س = ٢^5 ، س = ٢^4

⇐ س = ٣٢ ، س = ١٦

م.ح = {٣٢ ، ١٦}

(١٠) لو$_{س-1}$ (٧ − س) = ٢

الحل

٧ − س = (س − ١)^2

٧ − س = س^2 − ٢س + ١

⇐ س^2 − س − ٦ = صفر

(س − ٣)(س + ٢) = صفر

س = ٣ ، س = −٢ مرفوض

م.ح = {٣}

(١١) لو$_2$ (٢^س − ٤) + س − ٥ = صفر

الحل

لو$_2$ (٢^س − ٤) = ٥ − س

٢^س − ٤ = ٢$^{٥-س}$

بالضرب × ٢^س

٢^{٢س} − ٤ × ٢^س − ٣٢ = صفر

(٢^س − ٨)(٢^س + ٤) = صفر

٢^س = ٨ ، ٢^س = −٤ مرفوض

⇐ س = ٣

م.ح = {٣}

لاحظ : قيمة س

ضع كل قيمة سالبة مرفوضة

ضع كل قيمة موجبة مقبولة

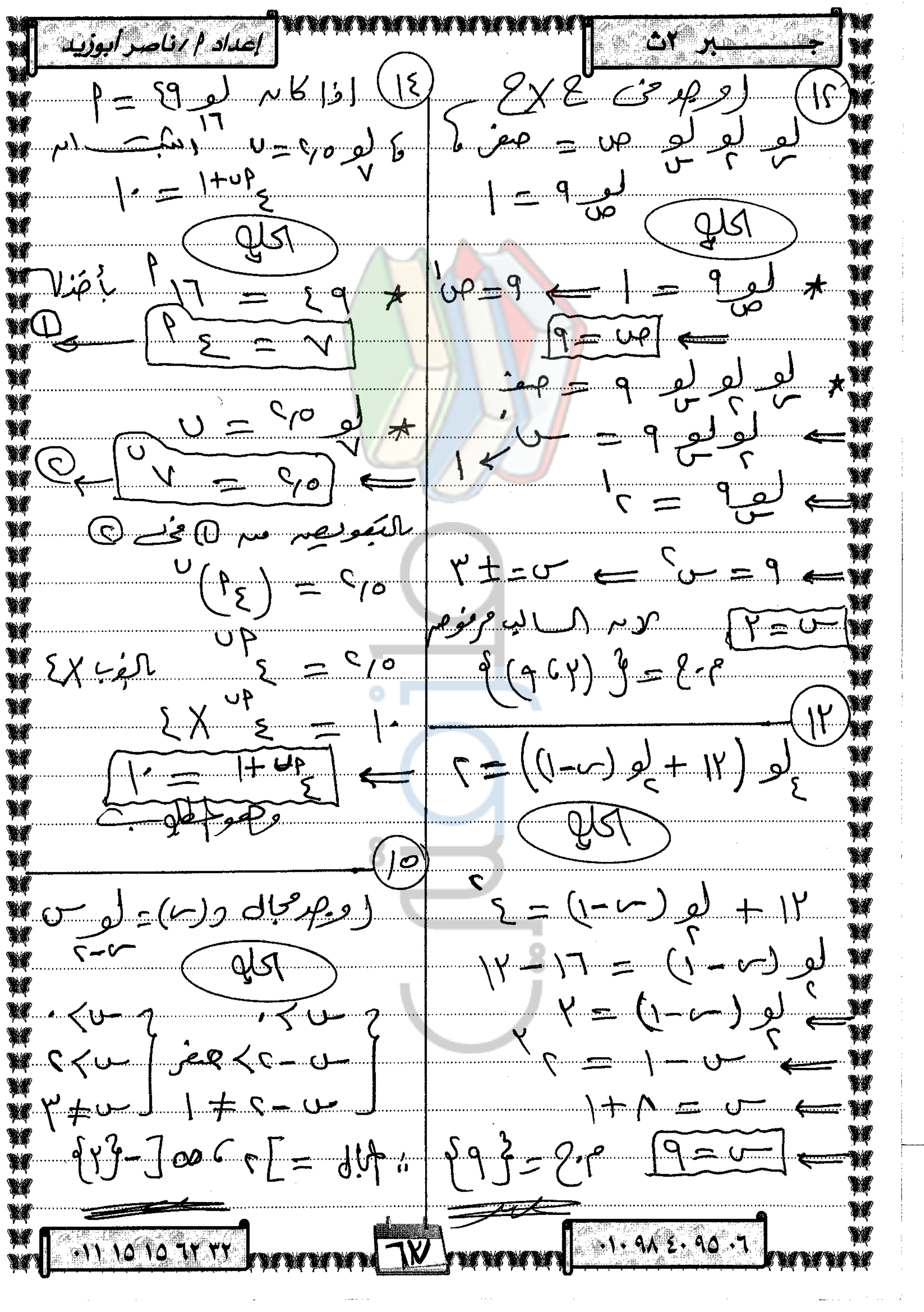
تمارين

حل المعادلات

(١) لو$_8$ $\sqrt{س^2 + 48}$ = $\frac{2}{3}$

(٢) لو$_2$ لو$_2$ (س^2 − ٢س) = ١

(٣) لو$_5$ (س^2 − ١١س − ١) = ٤



(١١) أوجد حل ع × ع

$لو_٢ لو_٢ لو_س ص = صفر$ ،

$لو_ص ٩ = ١$

الحل

* $لو_ص ٩ = ١ \Leftarrow ص = ٩^١$

$\Leftarrow$ ص = ٩

* $لو_٢ لو_٢ لو_س ٩ = صفر$

$\Leftarrow لو_٢ لو_س ٩ = ١$

$\Leftarrow لو_س ٩ = ٢$

$\Leftarrow ٩ = س^٢ \Leftarrow س = \pm ٣$

س = ٣ ، لأن السالب مرفوض

م . ح = { (٣ ، ٩) }

(١٢) $لو_٤ (١٢ + لو_٢ (س - ١)) = ٢$

الحل

$١٢ + لو_٢ (س - ١) = ٤^٢$

$لو_٢ (س - ١) = ١٦ - ١٢$

$\Leftarrow لو_٢ (س - ١) = ٢$

$\Leftarrow س - ١ = ٢^٢$

$\Leftarrow س = ٨ + ١$

$\Leftarrow$ س = ٩ ، م . ح = {٩}

(١٤) إذا كان $لو_{١٦} ٤٩ = أ$

، $لو_٧ ٢٫٥ = ب$ أثبت أن

$٤^{أب + ١} = ١٠$

الحل

* $٤٩ = ١٦^أ$ بأخذ الجذر

$٧ = ٤^أ$ ← (١)

* $لو_٧ ٢٫٥ = ب$

$\Leftarrow ٢٫٥ = ٧^ب$ ← (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

$٢٫٥ = (٤^أ)^ب$

$٢٫٥ = ٤^{أب}$ بالضرب × ٤

$١٠ = ٤^{أب} × ٤$

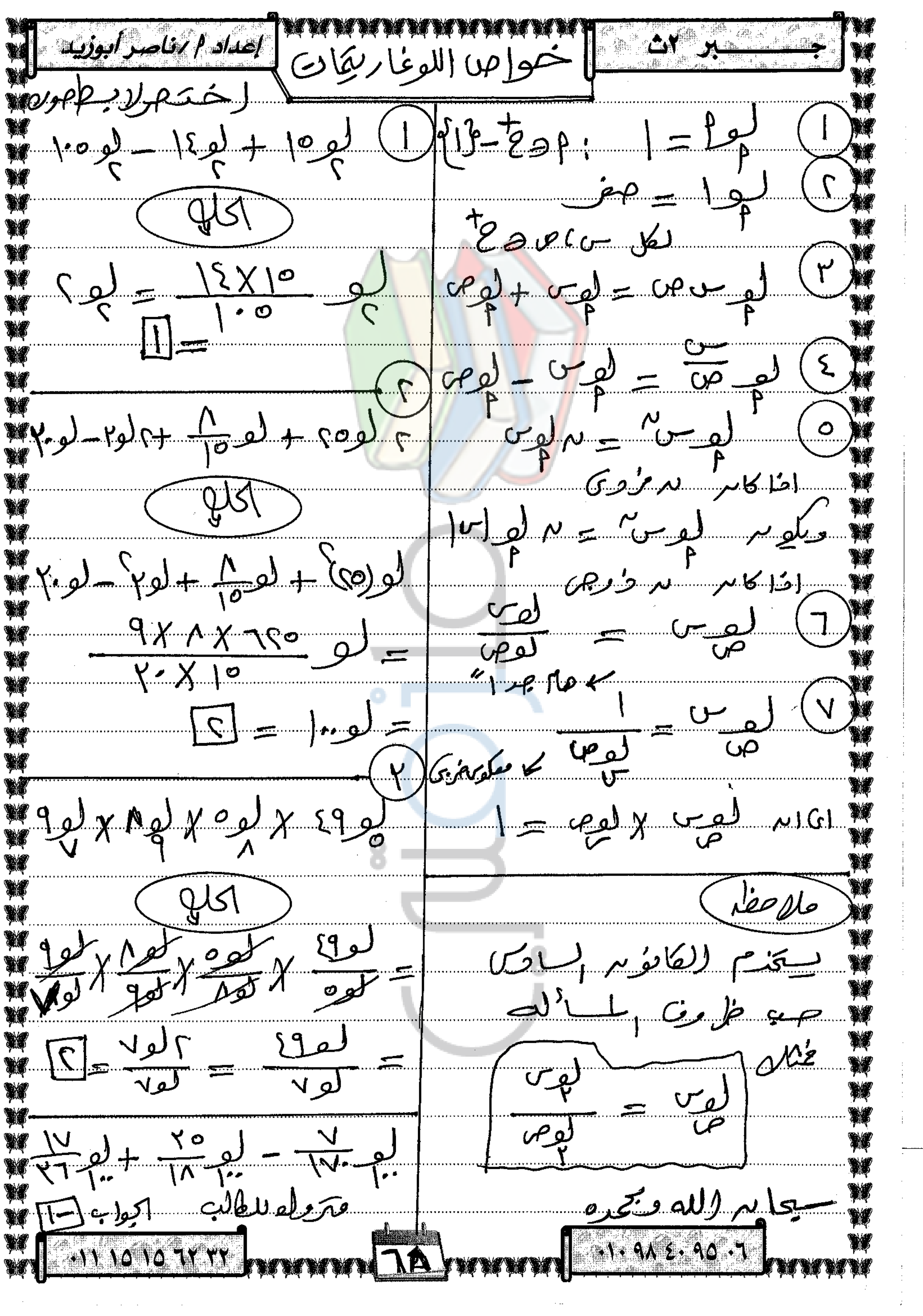
$\Leftarrow ٤^{أب + ١} = ١٠$ وهو المطلوب

(١٥) أوجد مجال د(س) = $لو_{س - ٢} س$

الحل

$\left.\begin{matrix} س > ٠ \\ س - ٢ > صفر \\ س - ٢ \ne ١ \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} س > ٠ \\ س > ٢ \\ س \ne ٣ \end{matrix}$

∴ المجال =]٢ ، ∞[- {٣}



خواص اللوغاريتمات

(١) $\log_{a} a = 1$ ؛ $a \in ح^{+} - \{1\}$

(٢) $\log_{a} 1 =$ صفر

لكل س، ص $\in ح^{+}$

(٣) $\log_{a} سص = \log_{a} س + \log_{a} ص$

(٤) $\log_{a} \frac{س}{ص} = \log_{a} س - \log_{a} ص$

(٥) $\log_{a} س^{ن} = ن \log_{a} س$ إذا كان ن فردي

ويكون $\log_{a} س^{ن} = ن \log_{a} |س|$ إذا كان ن زوجي

(٦) $\log_{ص} س = \frac{\log_{a} س}{\log_{a} ص}$

(٧) $\log_{ص} س = \frac{1}{\log_{س} ص}$ ← هام جداً ← مقلوب ضربي

إذن $\log_{ص} س \times \log_{س} ص = 1$

ملاحظة

يستخدم القانون السادس حسب ظروف المسألة

مثال: $\log_{ص} س = \frac{\log_{2} س}{\log_{2} ص}$

سبحان الله وبحمده

اختصر لأبسط صورة

(١) $\log_{2} 15 + \log_{2} 14 - \log_{2} 105$

الحل

$\log_{2} \frac{15 \times 14}{105} = \log_{2} 2 = \boxed{1}$

(٢) $2\log 25 + \log \frac{8}{15} + 2\log 3 - \log 20$

الحل

$\log (25)^{2} + \log \frac{8}{15} + \log 3^{2} - \log 20$

$= \log \frac{9 \times 8 \times 625}{20 \times 15}$

$= \log 100 = \boxed{2}$

(٣) $\log_{5} 49 \times \log_{8} 5 \times \log_{9} 8 \times \log_{7} 9$

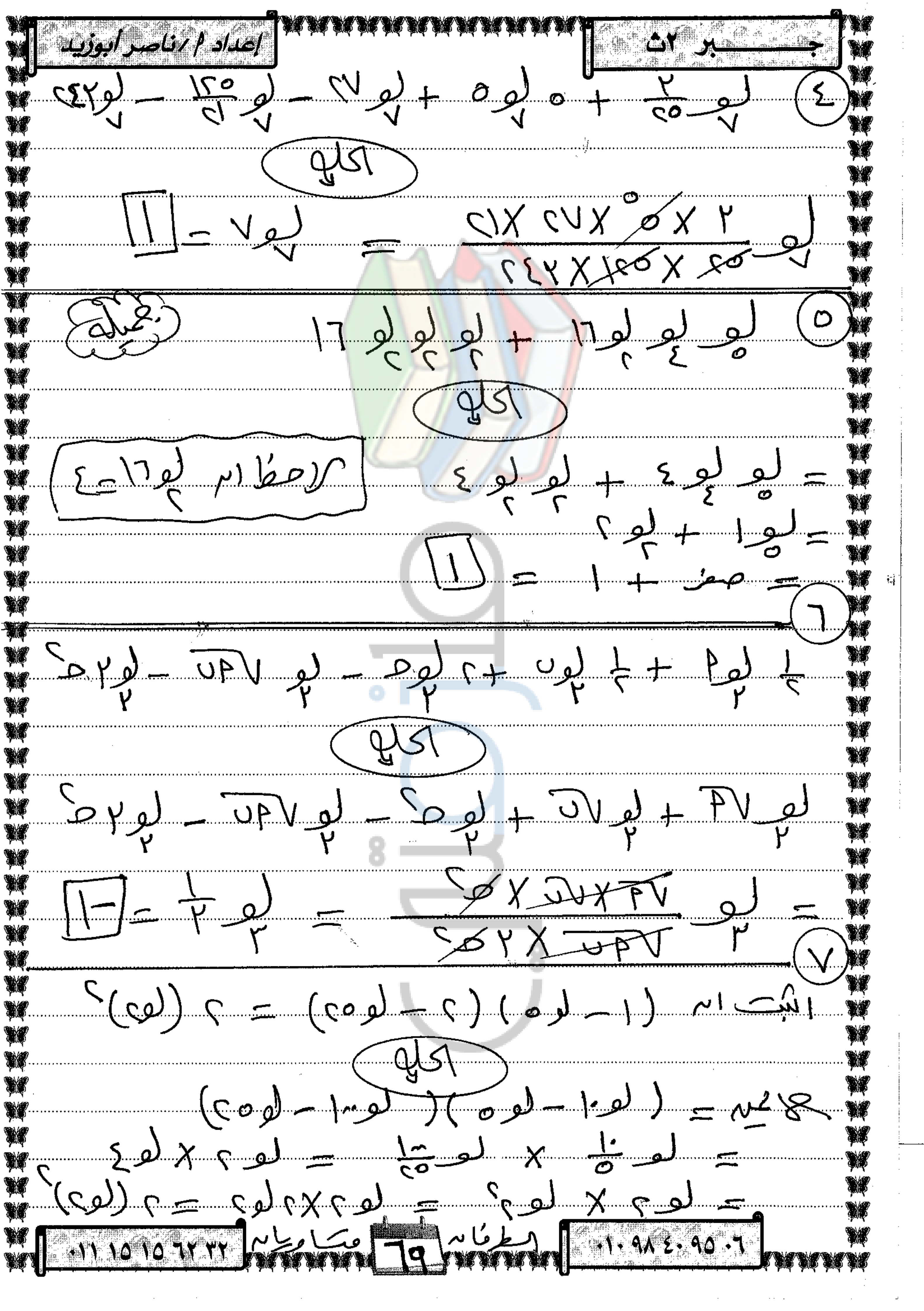
الحل

$= \frac{\log 49}{\log 5} \times \frac{\log 5}{\log 8} \times \frac{\log 8}{\log 9} \times \frac{\log 9}{\log 7}$

$= \frac{\log 49}{\log 7} = \frac{2\log 7}{\log 7} = \boxed{2}$

(٤) $\log_{100} \frac{7}{170} - \log_{100} \frac{25}{18} + \log_{100} \frac{17}{26}$

متروك للطالب — الجواب $\boxed{-1}$



④ $\log_7 \frac{2}{25} + 5 \log_7 5 + \log_7 27 - \log_7 \frac{125}{21} - \log_7 242$

الحل

$\log_7 \frac{2 \times 5^5 \times 27 \times 21}{25 \times 125 \times 242} = \log_7 7 = \boxed{1}$

---

⑤ $\log_5 \log_4 \log_2 16 + \log_2 \log_2 \log_2 16$ (جميلة)

الحل

$= \log_5 \log_4 4 + \log_2 \log_2 4$

لاحظ ان $\log_2 16 = 4$

$= \log_5 1 + \log_2 2$

$=$ صفر $+ 1 = \boxed{1}$

---

⑥ $\frac{1}{2} \log_2 أ + \frac{1}{2} \log_2 ب + 2 \log_2 ح - \log_2 \sqrt{أب} - \log_2 2ح^2$

الحل

$\log_2 \sqrt{أ} + \log_2 \sqrt{ب} + \log_2 ح^2 - \log_2 \sqrt{أب} - \log_2 2ح^2$

$= \log_2 \frac{\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \times ح^2}{2ح^2 \times \sqrt{أب}} = \log_2 \frac{1}{2} = \boxed{-1}$

---

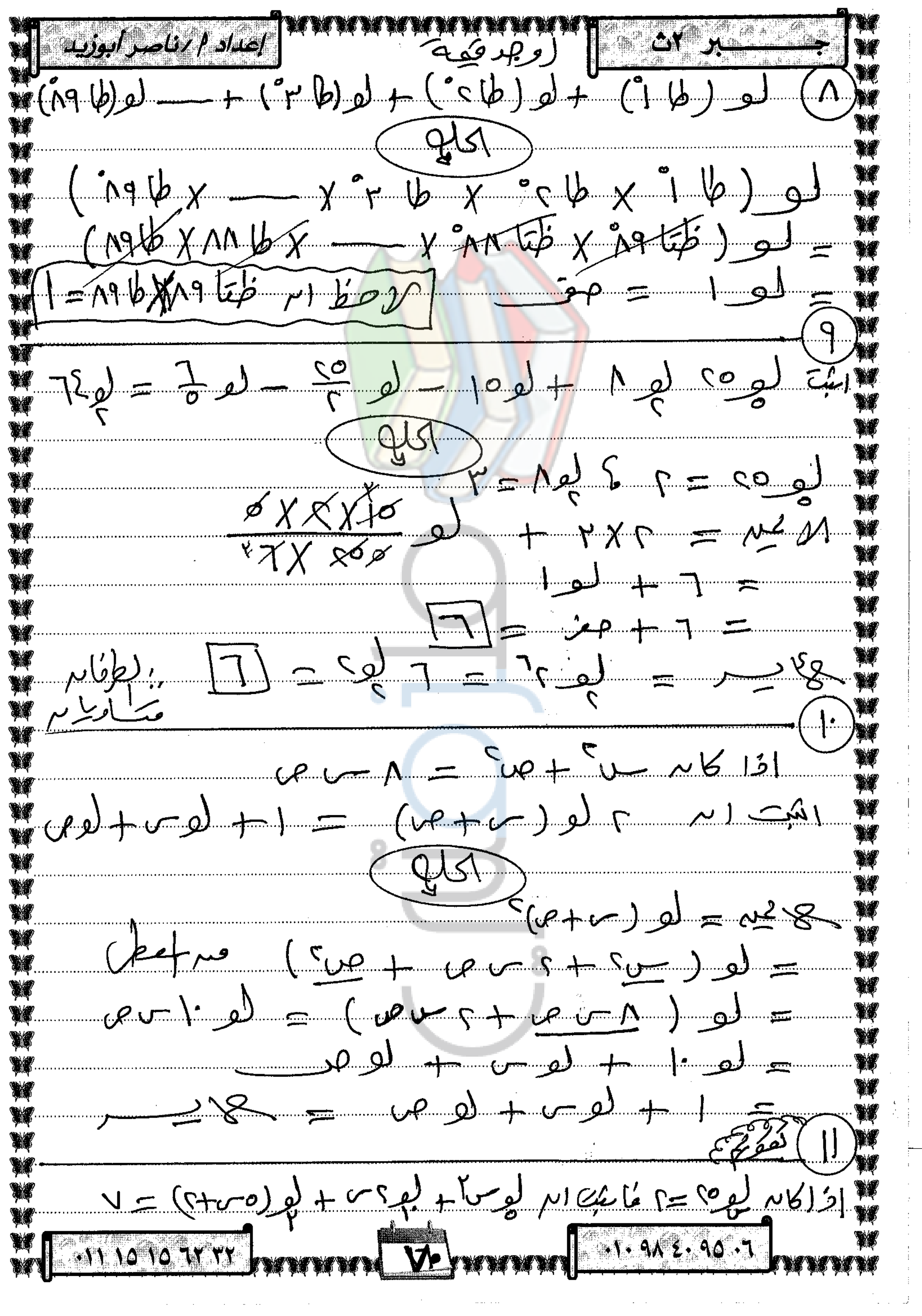
⑦ اثبت ان $(1 - \log 5)(2 - \log 25) = 2 (\log 2)^2$

الحل

الأيمن $= (\log 10 - \log 5)(\log 100 - \log 25)$

$= \log \frac{10}{5} \times \log \frac{100}{25} = \log 2 \times \log 4$

$= \log 2 \times \log 2^2 = \log 2 \times 2 \log 2 = 2 (\log 2)^2$



(٨) لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + ــــ + لو (ظا ٨٩°)

الحل

لو (ظا ١° × ظا ٢° × ظا ٣° × ــــ × ظا ٨٩°)

= لو (ظتا ٨٩° × ظتا ٨٨° × ــــ × ظا ٨٨ × ظا ٨٩)

= لو ١ = صفر

ملحوظة: ظتا ٨٩ × ظا ٨٩ = ١

(٩) اثبت أن $لو_{٥}\,٢٥\ لو_{٢}\,٨ + لو\,١٥ - لو\,\frac{٢٥}{٢} - لو\,\frac{٦}{٥} = لو_{٢}\,٦٤$

الحل

$لو_{٥}\,٢٥ = ٢$ ، $لو_{٢}\,٨ = ٣$

الأيمن = ٢ × ٣ + $لو\,\frac{١٥ × ٢ × ٥}{٢٥ × ٦}$

= ٦ + لو ١

= ٦ + صفر = ٦

الأيسر = $لو_{٢}\,٦٤ = ٦\ لو_{٢}\,٢ = ٦$ ∴ الطرفان متساويان

(١٠) إذا كان س² + ص² = ٨ س ص

اثبت أن ٢ لو (س + ص) = ١ + لو س + لو ص

الحل

الأيمن = لو (س + ص)²

= لو (س² + ٢ س ص + ص²) من المعطى

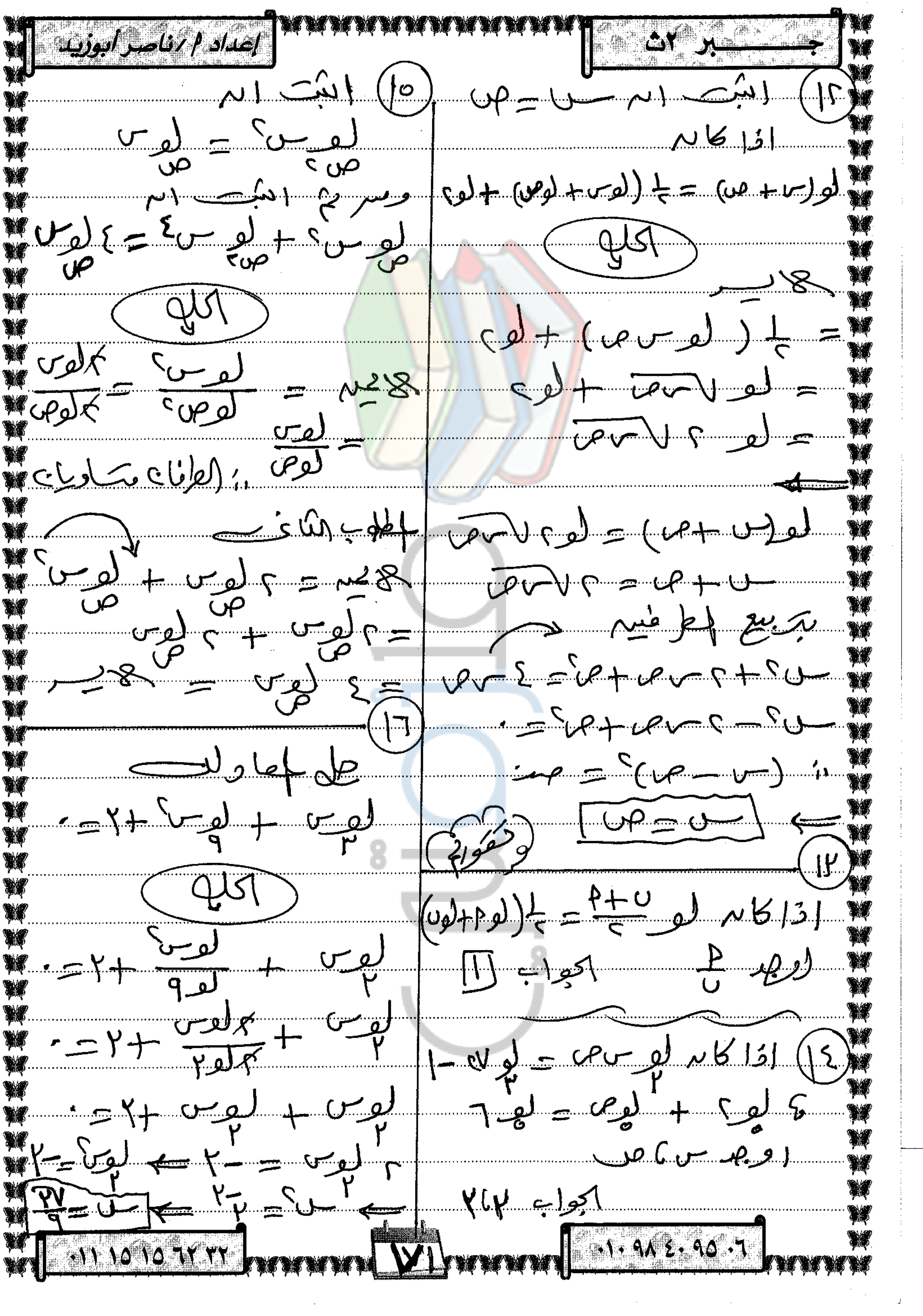
= لو (٨ س ص + ٢ س ص) = لو ١٠ س ص

= لو ١٠ + لو س + لو ص

= ١ + لو س + لو ص = الأيسر

(١١) تمرين

إذا كان $لو_{س}\,٢٥ = ٢$ فاثبت أن $لو_{س}\,٢ + لو_{٢}\,س^{٣} + لو(س + ٢) = ٧$



(١٢) اثبت انه س = ص

اذا كان

$لو(س + ص) = \frac{1}{2}(لوس + لوص) + لو٢$

الحل

الايسر

$= \frac{1}{2}(لو س ص) + لو٢$

$= لو \sqrt{س ص} + لو٢$

$= لو ٢\sqrt{س ص}$

$\Leftarrow لو(س + ص) = لو ٢\sqrt{س ص}$

$س + ص = ٢\sqrt{س ص}$

بتربيع الطرفين

$س^2 + ٢ س ص + ص^2 = ٤ س ص$

$س^2 - ٢ س ص + ص^2 = ٠$

$\therefore (س - ص)^2 = صفر$

$\Leftarrow$ **س = ص**

وفقوا

(١٣) اذا كان $لو \frac{ن + م}{٢} = \frac{1}{2}(لوم + لون)$

اوجد $\frac{م}{ن}$ الجواب [١]

(١٤) اذا كان $لو_٣ س ص = لو_٣ ٢٧ - ١$

، $لو_٥ ٢ + لو_٥ ص = لو_٥ ٦$

اوجد س ، ص

الجواب ٣ ، ٢

(١٥) اثبت انه

$لو_{ص^2} س^2 = لو_ص س$

ومن ثم اثبت ان

$لو_ص س^2 + لو_{ص^2} س^4 = ٤ لو_ص س$

الحل

$الايمن = \frac{لو س^2}{لو ص^2} = \frac{٢ لوس}{٢ لوص}$

$= \frac{لوس}{لوص}$

∴ الطرفان متساويان

المطلوب الثاني

$الايمن = ٢ لو_ص س + لو_{ص^2} س^2$

$= ٢ لو_ص س + ٢ لو_ص س$

$= ٤ لو_ص س = الايسر$

(١٦) حل المعادلة

$لو_٣ س + لو_٩ س^2 + ٢ = ٠$

الحل

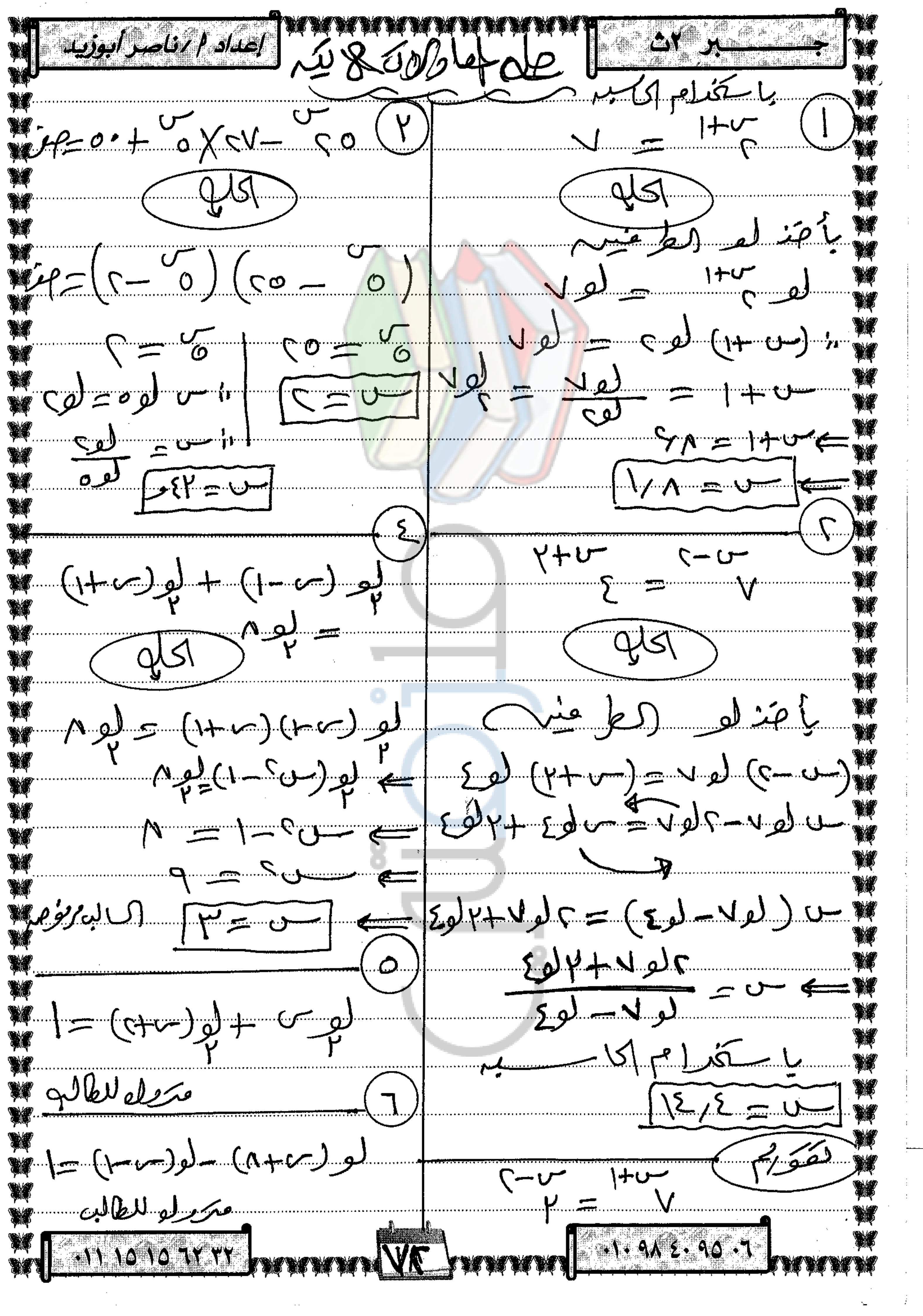
$لو_٢ س + \frac{لو س^2}{لو ٩} + ٢ = ٠$

$لو_٢ س + \frac{٢ لوس}{٢ لو ٣} + ٢ = ٠$

$لو_٢ س + لو_٢ س + ٢ = ٠$

$٢ لو_٢ س = -٢ \Leftarrow لو_٢ س^2 = -٢$

$س^2 = ٣^{-٢} \Leftarrow$ $س = \frac{٢٧}{٩}$



إعداد أ/ ناصر أبوزيد

حل معادلات أسية

(١) باستخدام الحاسبة

$2^{س+1} = 7$

الحل

بأخذ لو الطرفين

لو $2^{س+1}$ = لو 7

∴ (س + 1) لو 2 = لو 7

س + 1 = $\frac{لو 7}{لو 2}$ = $لو_2 7$

⇐ س + 1 = 2.8

⇐ **س = 1.8**

(٢)

$7^{س-2} = 4^{س+2}$

الحل

بأخذ لو الطرفين

(س − 2) لو 7 = (س + 2) لو 4

س لو 7 − 2 لو 7 = س لو 4 + 2 لو 4

س (لو 7 − لو 4) = 2 لو 7 + 2 لو 4

⇐ س = $\frac{2 لو 7 + 2 لو 4}{لو 7 - لو 4}$

باستخدام الحاسبة

س = 14.4

تقويم

$7^{س+1} = 2^{س-2}$

(٣)

$5^{2س} - 27 \times 5^{س} + 50 = صفر$

الحل

$(5^{س} - 25)(5^{س} - 2) = صفر$

$5^{س} = 25$ ⇐ **س = 2**

$5^{س} = 2$

∴ س لو 5 = لو 2

∴ س = $\frac{لو 2}{لو 5}$

س = 0.43

(٤)

$لو_2(س-1) + لو_2(س+1) = لو_2 8$

الحل

$لو_2(س-1)(س+1) = لو_2 8$

⇐ $لو_2(س^2-1) = لو_2 8$

⇐ $س^2 - 1 = 8$

⇐ $س^2 = 9$

⇐ **س = 3** السالب مرفوض

(٥)

$لو_2 س + لو_2(س+2) = 1$

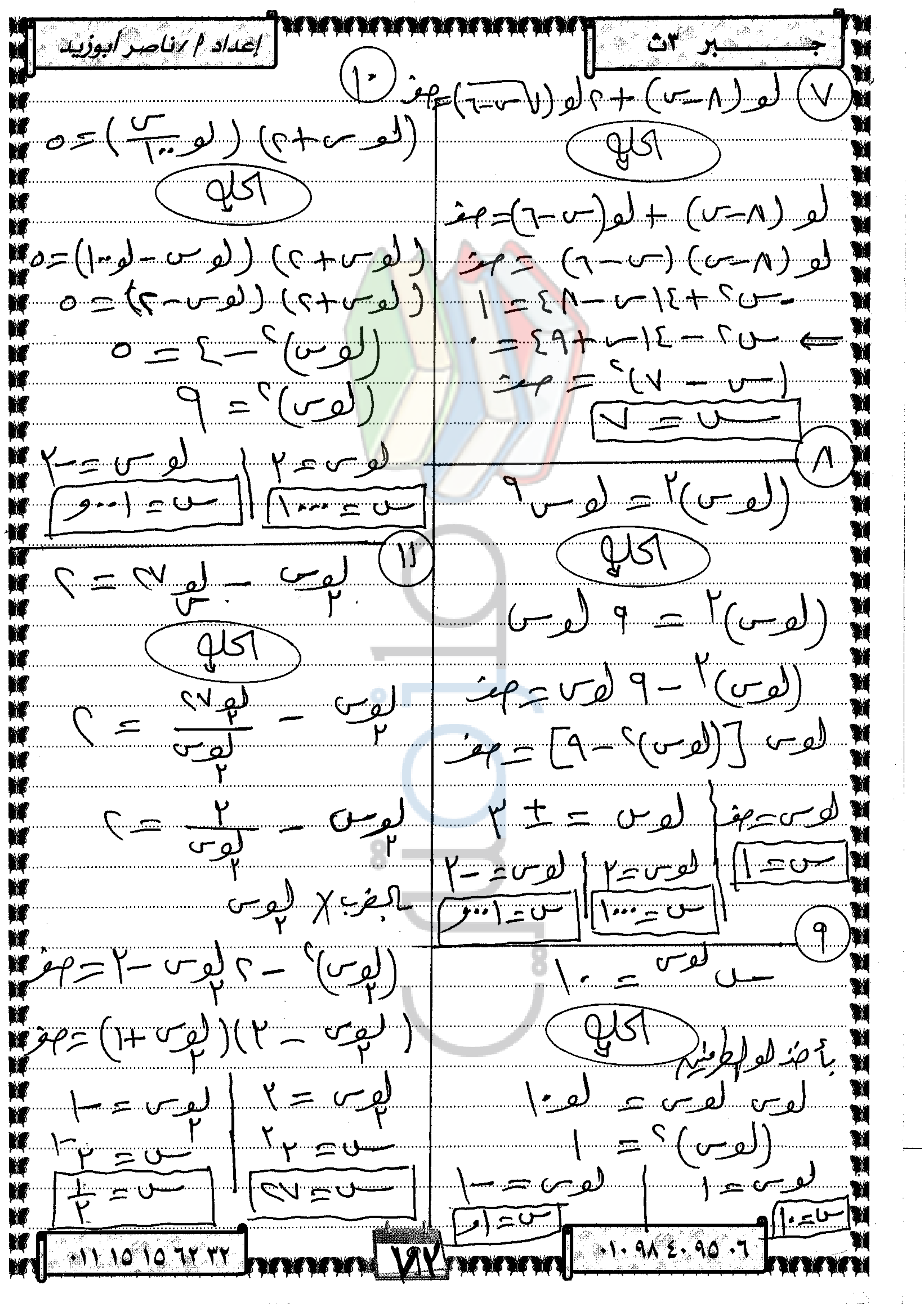
متروك للطالب

(٦)

لو(س + 8) − لو(س − 1) = 1

متروك للطالب

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦
٠١١١٥١٥٦٢٣٢



(٧) لو(٨ − س) + ٢ لو($\sqrt{س − ٦}$) = صفر

الحل

لو(٨ − س) + لو(س − ٦) = صفر

لو(٨ − س)(س − ٦) = صفر

− س² + ١٤س − ٤٨ = ١

⇐ س² − ١٤س + ٤٩ = ٠

(س − ٧)² = صفر

س = ٧

(٨) (لو س)² = لو س⁹

الحل

(لو س)² = ٩ لو س

(لو س)² − ٩ لو س = صفر

لو س [(لو س)² − ٩] = صفر

لو س = صفر ⇐ **س = ١**

لو س = ± ٣

لو س = ٣ ⇐ **س = ١٠٠٠** | لو س = −٣ ⇐ **س = ٠٫٠٠١**

(٩) س^لو س = ١٠

الحل

بأخذ لو الطرفين

لو س لو س = لو ١٠

(لو س)² = ١

لو س = ١ ⇐ **س = ١٠** | لو س = −١ ⇐ **س = ٠٫١**

(١٠) (لو س + ٢)(لو $\frac{س}{١٠٠}$) = ٥

الحل

(لو س + ٢)(لو س − لو ١٠٠) = ٥

(لو س + ٢)(لو س − ٢) = ٥

(لو س)² − ٤ = ٥

(لو س)² = ٩

لو س = ٣ ⇐ **س = ١٠٠٠** | لو س = −٣ ⇐ **س = ٠٫٠٠١**

(١١) لو٣ س − لوس ٢٧ = ٢

الحل

لو٣ س − $\frac{لو٣ ٢٧}{لو٣ س}$ = ٢

لو٣ س − $\frac{٣}{لو٣ س}$ = ٢

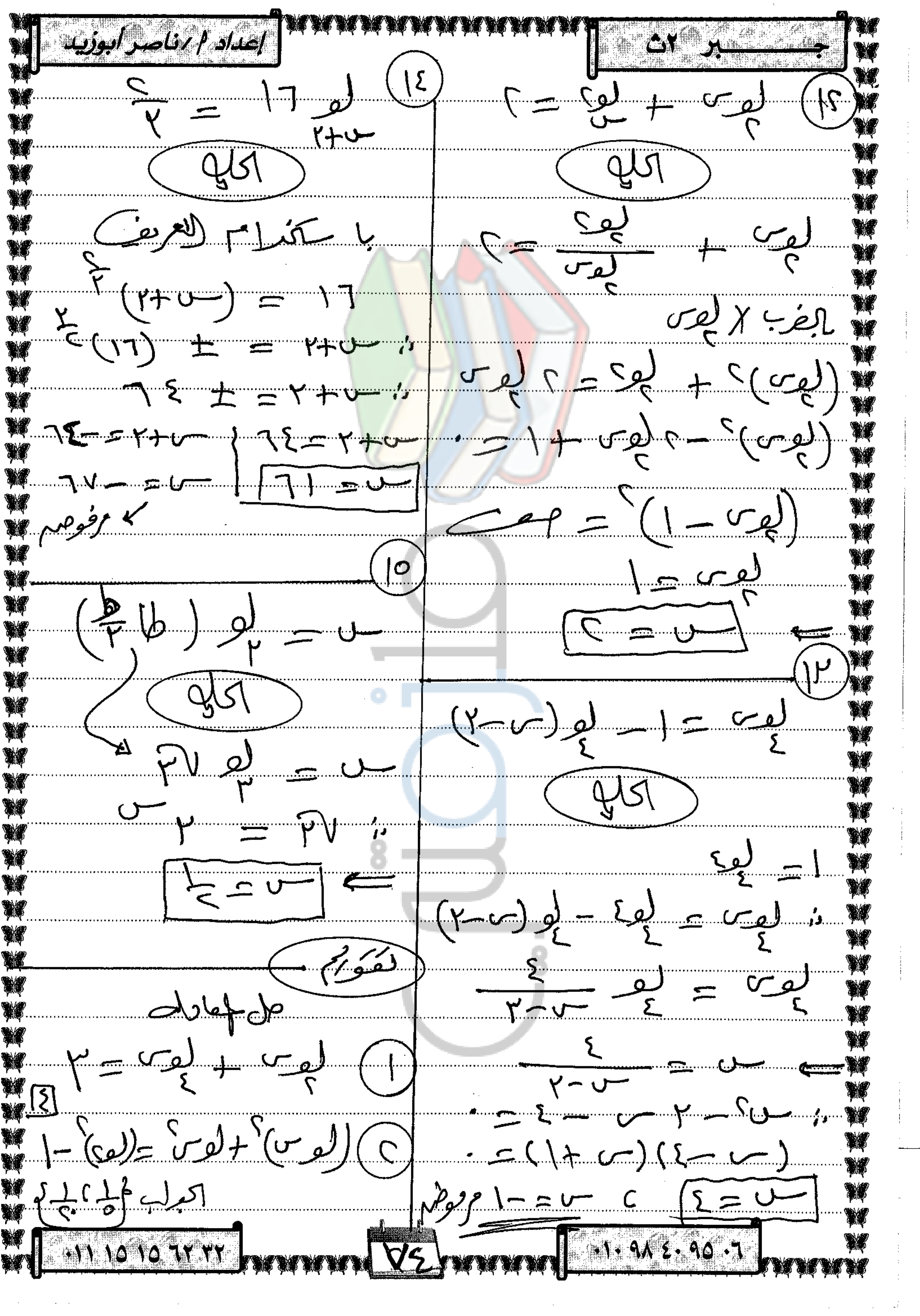
بالضرب × لو٣ س

(لو٣ س)² − ٢ لو٣ س − ٣ = صفر

(لو٣ س − ٣)(لو٣ س + ١) = صفر

لو٣ س = ٣ ⇐ س = ٣³ ⇐ **س = ٢٧**

لو٣ س = −١ ⇐ س = ٣⁻¹ ⇐ **س = $\frac{١}{٣}$**



(١٢) $لو_٢ س + لو_س ٢ = ٢$

الحل

$لو_٢ س + \frac{لو_٢ ٢}{لو_٢ س} = ٢$

بالضرب × $لو_٢ س$

$(لو_٢ س)^٢ + لو_٢ ٢ = ٢ لو_٢ س$

$(لو_٢ س)^٢ - ٢ لو_٢ س + ١ = ٠$

$(لو_٢ س - ١)^٢ = صفر$

$لو_٢ س = ١$

⇐ $س = ٢$

(١٣) $لو_٤ س = ١ - لو_٤ (س - ٢)$

الحل

$١ = لو_٤ ٤$

∴ $لو_٤ س = لو_٤ ٤ - لو_٤ (س - ٢)$

$لو_٤ س = لو_٤ \frac{٤}{س - ٢}$

⇐ $س = \frac{٤}{س - ٢}$

∴ $س^٢ - ٢ س - ٤ = ٠$

$(س - ٤)(س + ١) = ٠$

$س = ٤$ ، $س = -١$ مرفوض

(١٤) $لو_{س+٢} ١٦ = \frac{٢}{٣}$

الحل

باستخدام التعريف

$(س + ٢)^{\frac{٢}{٣}} = ١٦$

∴ $س + ٢ = \pm (١٦)^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $س + ٢ = \pm ٦٤$

$س + ٢ = ٦٤$ ⇐ $س = ٦٢$

$س + ٢ = -٦٤$ ⇐ $س = -٦٦$ ← مرفوض

(١٥) $س = لو_٢ (ظا \frac{ط}{٣})$

الحل

$س = لو_٣ \sqrt{٣}$

∴ $٣^س = \sqrt{٣}$

⇐ $س = \frac{١}{٢}$

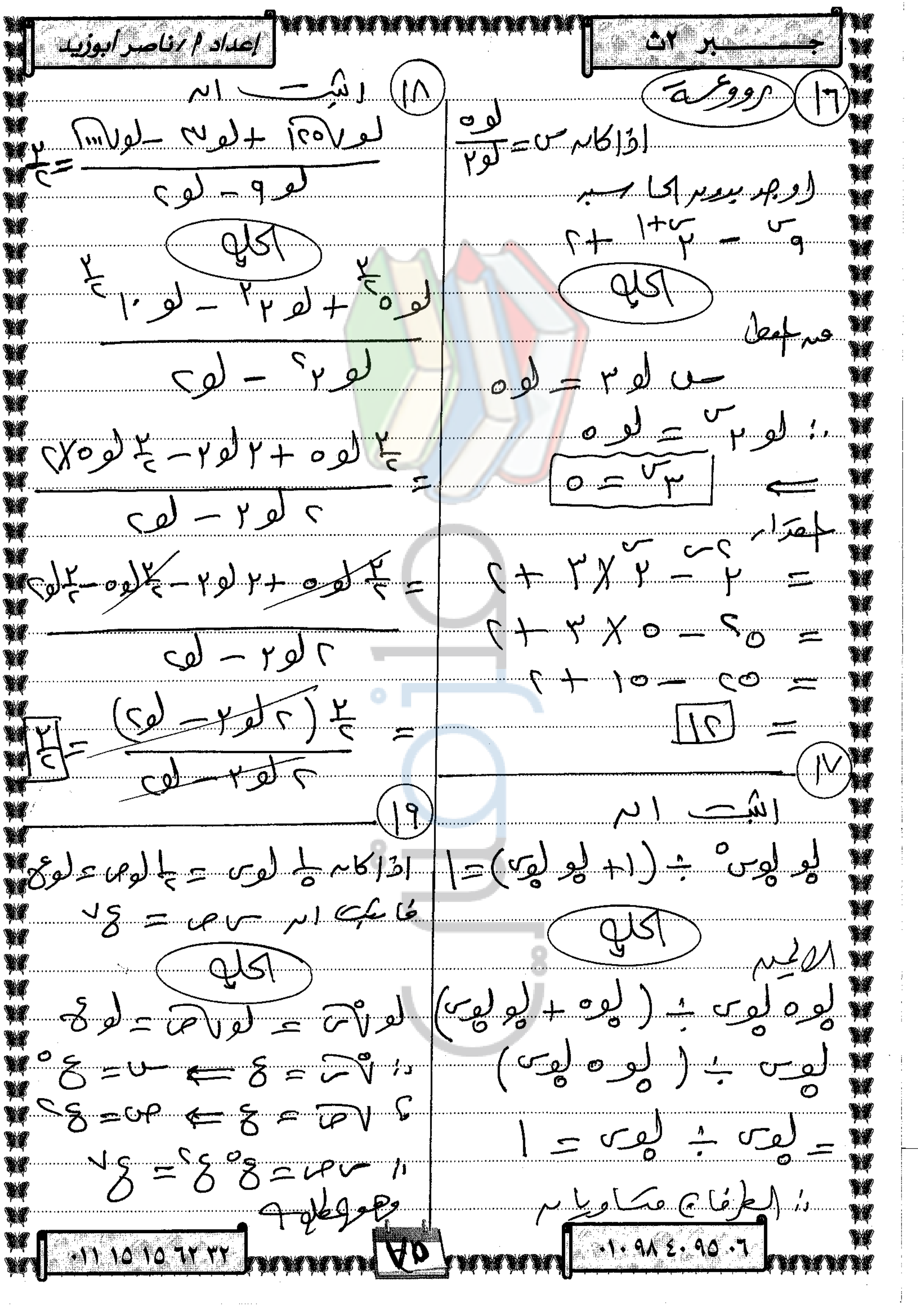
تقويم

حل المعادلات

(١) $لو_٢ س + لو_٤ س = ٣$ [٤]

(٢) $(لو س)^٢ + لو س^٢ = (لو ٥)^٢ - ١$

الجواب $\{\frac{١}{٥} ، \frac{١}{٢٠}\}$



(١٦) روعة

إذا كان $س = \frac{لو ٥}{لو ٣}$

أوجد بدون الحاسبة

$٩^{س} - ٣^{س+١} + ٢$

الحل

من المعطى

$س \, لو ٣ = لو ٥$

$\therefore لو ٣^{س} = لو ٥$

$\Leftarrow \boxed{٣^{س} = ٥}$

المقدار

$= (٣^{س})^{٢} - ٣^{س} \times ٣ + ٢$

$= ٥^{٢} - ٥ \times ٣ + ٢$

$= ٢٥ - ١٥ + ٢$

$= \boxed{١٢}$

(١٧) أثبت أن

$لو_{ب} لو_{ب} س^{ب} \div (١ + لو_{ب} لو_{ب} س) = ١$

الحل

الأيمن

$لو_{ب} لو_{ب} س^{ب} \div (لو_{ب} ب + لو_{ب} لو_{ب} س)$

$لو_{ب} (ب \, لو_{ب} س) \div (لو_{ب} \, ب \, لو_{ب} س)$

$= لو_{ب} (ب \, لو_{ب} س) \div لو_{ب} (ب \, لو_{ب} س) = ١$

$\therefore$ الطرفان متساويان

(١٨) أثبت أن

$\frac{لو \sqrt{١٢٥} + لو ٨ - لو \sqrt{١٠٠٠}}{لو ٤ - لو ٢} = \frac{٣}{٢}$

الحل

$\frac{لو ٥^{\frac{٣}{٢}} + لو ٢^{٣} - لو ١٠^{\frac{٣}{٢}}}{لو ٢^{٢} - لو ٢}$

$= \frac{\frac{٣}{٢} لو ٥ + ٣ لو ٢ - \frac{٣}{٢} لو (٥ \times ٢)}{٢ لو ٢ - لو ٢}$

$= \frac{\frac{٣}{٢} لو ٥ + ٣ لو ٢ - \frac{٣}{٢} لو ٥ - \frac{٣}{٢} لو ٢}{٢ لو ٢ - لو ٢}$

$= \frac{\frac{٣}{٢} (٢ لو ٢ - لو ٢)}{٢ لو ٢ - لو ٢} = \boxed{\frac{٣}{٢}}$

(١٩)

إذا كان $\frac{١}{٥} لو س = \frac{١}{٢} لو ص = لو ع$

فأثبت أن $س ص = ع^{٧}$

الحل

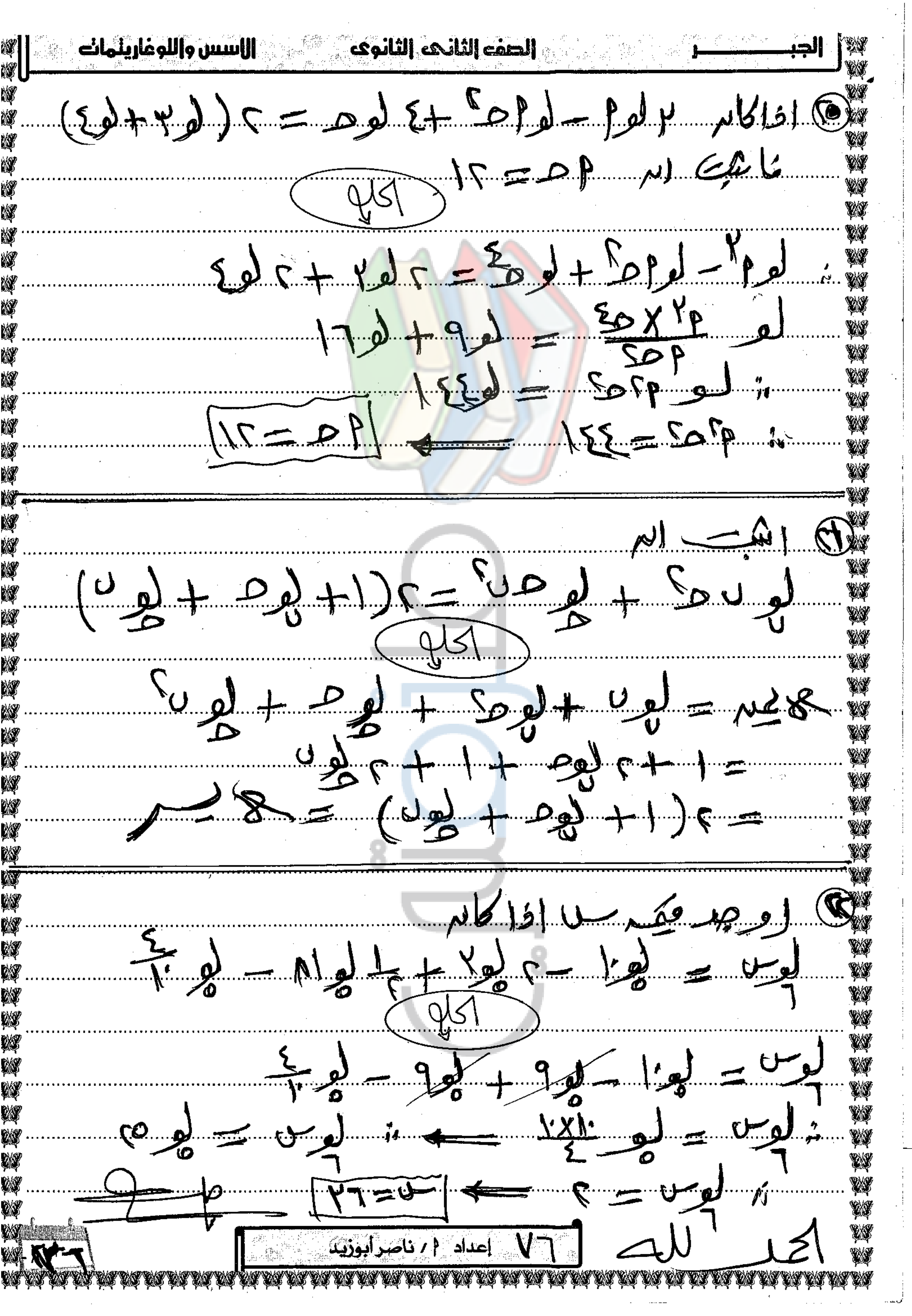
$لو \sqrt[٥]{س} = لو \sqrt{ص} = لو ع$

$\therefore \sqrt[٥]{س} = ع \Leftarrow س = ع^{٥}$

$\sqrt{ص} = ع \Leftarrow ص = ع^{٢}$

$\therefore س ص = ع^{٥} ع^{٢} = ع^{٧}$

وهو المطلوب



⑤ إذا كان $٢ لو أ - لو أ هـ^٢ + ٤ لو هـ = ٢ (لو ٣ + لو ٤)$

فأثبت أن $أ هـ = ١٢$

(الحل)

$\because لو أ^٢ - لو أ هـ^٢ + لو هـ^٤ = ٢ لو ٣ + ٢ لو ٤$

$لو \frac{أ^٢ \times هـ^٤}{أ هـ^٢} = لو ٩ + لو ١٦$

$\therefore لو أ هـ^٢ = لو ١٤٤$

$\therefore أ هـ^٢ = ١٤٤ \Leftarrow \boxed{أ هـ = ١٢}$

---

⑥ أثبت أن

$لو_ن ن هـ^٢ + لو_هـ هـ ن^٢ = ٢ (١ + لو_ن هـ + لو_هـ ن)$

(الحل)

الطرف الأيمن $= لو_ن ن + لو_ن هـ^٢ + لو_هـ هـ + لو_هـ ن^٢$

$= ١ + ٢ لو_ن هـ + ١ + ٢ لو_هـ ن$

$= ٢ (١ + لو_ن هـ + لو_هـ ن) =$ الأيسر

---

⑦ أوجد قيمة س إذا كان

$لو_٦ س = لو_٥ ١٠ - ٢ لو_٥ ٣ + \frac{١}{٢} لو_٥ ٨١ - لو_٥ \frac{٤}{١٠}$

(الحل)

$لو_٦ س = لو_٥ ١٠ - لو_٥ ٩ + لو_٥ ٩ - لو_٥ \frac{٤}{١٠}$

$\therefore لو_٦ س = لو_٥ \frac{١٠ \times ١٠}{٤} \Leftarrow \therefore لو_٦ س = لو_٥ ٢٥$

$\therefore لو_٦ س = ٢ \Leftarrow \boxed{س = ٣٦}$

الحمد لله



امتحان شامل

إعداد أ/ ناصر أبوزيد

٨٠ درجة

السؤال الأول : أكمل

١) الدالة $د(س) = س^{٢} - ٤$ تناقصية في ____

٢) مدى الدالة $د(س) = (س + ٢)^{٢} - ١$ هو ____

٣) مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س - ٣}$ هو ____

٤) مجال الدالة $د(س) = \frac{٣}{\sqrt{س - ٢}}$ هو ____

٥) مجال الدالة $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ هو ____

٦) مدى الدالة $د(س) = -|س - ٣| + ١$ هو ____

٧) مجال الدالة $د(س) = \frac{١}{س - ٣} + ٢$ هو ____

٨) مدى الدالة $د = \begin{cases} ٣ & ، س \geq ١ \\ س^{٣} & ، س < ١ \end{cases}$ هو ____

٩) إذا كان مجال الدالة $د(س) = \frac{٢}{س^{٢} - ٦س + ٥}$ هو $ح - \{٢ ، ل\}$ فإن ل = ____

١٠) نقطة تماثل الدالة $د(س) = ٢ - (س + ١)^{٣}$ هي ____

١١) مدى الدالة $د(س) = -س^{٢}$ ، $س \in [-٢ ، ٢]$ هو ____

١٢) مجموعة حل المتباينة $|٢س - ١٥| + ٧ > ٧$ هو ____

١٣) إذا كان $س^{\frac{٢}{٣}} = ٦٤$ فإن س = ____

١٤) إذا كان س < صفر فإن $\sqrt{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٣}} - \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + ١ =$ ____

١٥) إذا كان $٥^{س - ١} = ٣^{٢س - ٢}$ فإن س = ____

١٦) مجموع جذور المعادلة $س^{٤} = ١٦$ هو ____

١٧) إذا كان $د(س) = ٢س + ١$ ، $ر(س) = س^{٢} - ٥$ فإن $(ر \circ د)(-٢) =$ ____

١٨) إذا كان $٣^{ص} \times ٢٧ = ٢^{ص} \times ٨$ فإن ص = ____

٠١١١٥١٥٦٢٣٢

٠١٠٩٨٤٠٩٥٠٦



(١٩) $\sqrt[4]{١٦ س^٤ ص^٨}$ = ______

(٢٠) إذا كان $٣^م = ٤^ن$ فإن $٩^{\frac{م}{ن}} + ١٦^{\frac{ن}{م}}$ = ______

س٣ اختر

(١) الدالة الاطرادية من بين الدوال الآتية

(أ) د = س + ٢ (ب) $س^٢$ (جـ) د = |س| (د) د = ٥

(٢) $٥^س = ٢$ فإن $(٢٥)^س$ = ______

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

(٣) ما هى المحصور بين منحنى الدالتين د(س) = |س+٢| - ٣ ، ر(س) = صفر هو ______

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٤) إذا كان د(س) = $\frac{1}{س}$ فإن نقطة تماثل الدالة د(س+١) + ١ هي ______

(أ) (١، ٠) (ب) (٠، ١) (جـ) (-١، ٢) (د) (-١، ١)

(٥) منحنى الدالة د(س) = $س^٢ + ٣$ هو نفس منحنى د(س) = $س^٢$ بإزاحة ٢ وحدات في اتجاه ______

(أ) و س (ب) $\overleftarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overleftarrow{وص}$

(٧) أي مما يأتي لا يساوي $(\sqrt[4]{س^٥})$ = ______

(أ) $(\sqrt[4]{س})^٥$ (ب) $\sqrt[٥]{س^٤}$ (جـ) $س^{\frac{٥}{٤}}$ (د) $(س^{\frac{1}{٥}})^٤$

(٨) مجال الدالة د(س) = $\frac{1}{|س| + ٢}$ هو ______

(أ) ح (ب) ح - {-٢} (جـ) ح - {±٢}

(٩) مجال د(س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ هو ______

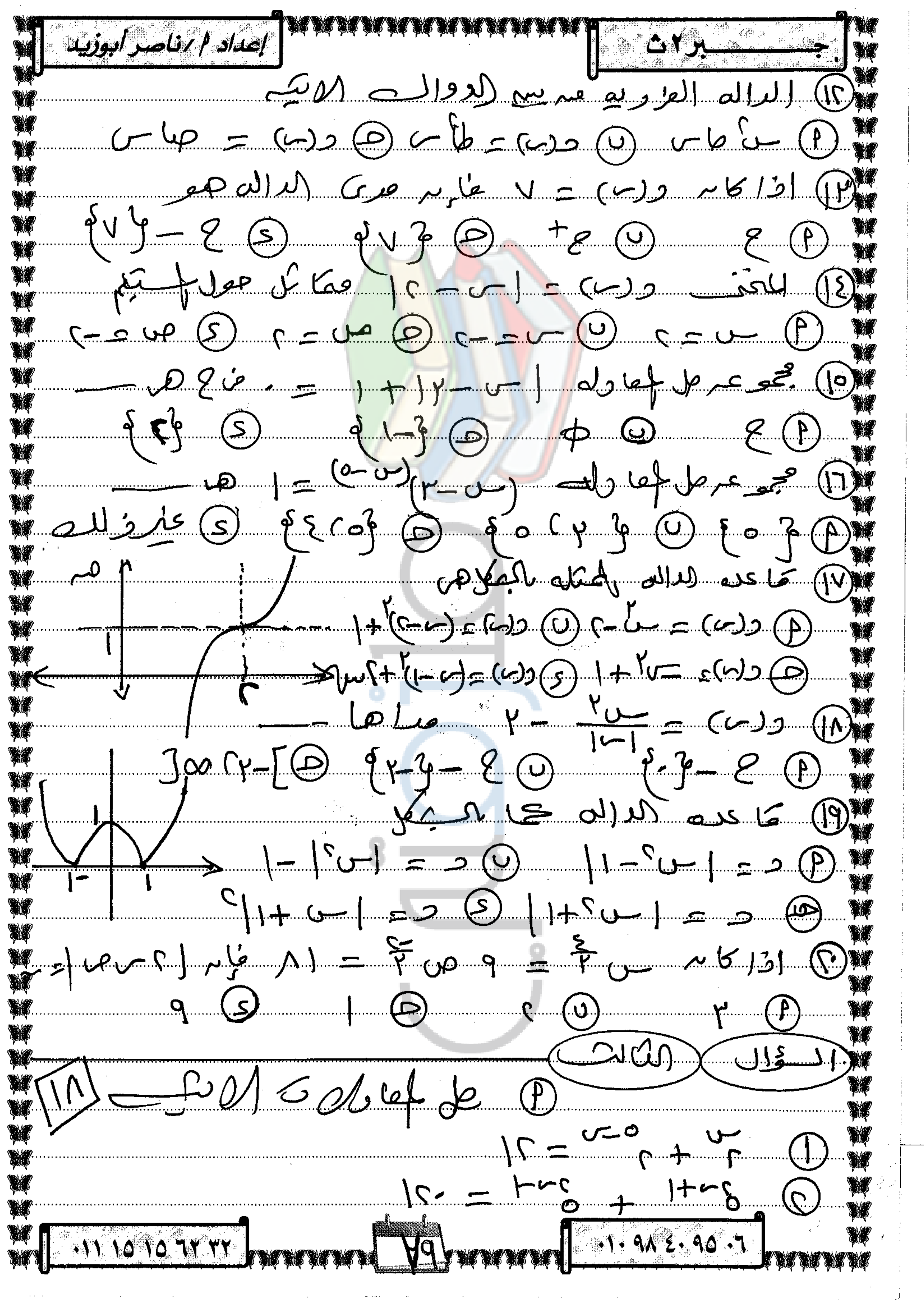
(أ) [-٣، ٣] (ب) ح -]-٢، ٢[(جـ)]-٢، ٢[

(١٠) مدى الدالة د(س) = $\sqrt{س - ٥}$ هو ______

(أ) [٥، ∞[(ب) $ح^+ \cup \{٠\}$ (جـ) ح - {٥} (د) ح*

(١١) إذا كانت د فردية ، د(١) = ٢ أي من النقط الآتية ∈ د

(أ) (-١، ٢) (ب) (-١، -٢) (جـ) (١، -٢) (د) (-١، ٠)



١٢) الدالة الدورية من بين الدوال الآتية

(أ) $س^4$ طاس (ب) د(س) = طا²س (ج) د(س) = جاس

١٣) إذا كانت د(س) = ٧ فإن مدى الدالة هو

(أ) ح (ب) $ح^+$ (ج) {٧} (د) ح − {٧}

١٤) المنحنى د(س) = |س − ٢| متماثل حول المستقيم

(أ) س = ٢ (ب) س = −٢ (ج) ص = ٢ (د) ص = −٢

١٥) مجموعة حل المعادلة |س − ٢| + ١ = ٠ في ح هي ـــــ

(أ) ح (ب) φ (ج) {−١} (د) {٣}

١٦) مجموعة حل المعادلة $(س − ٣)^{(س − ٥)} = ١$ هي ـــــ

(أ) {٥} (ب) {٢، ٥} (ج) {٥، ٤} (د) غير ذلك

١٧) قاعدة الدالة الممثلة بالشكل هي

(أ) د(س) = $س^3 − ٢$ (ب) د(س) = $(س − ٢)^3 + ١$

(ج) د(س) = $س^3 + ١$ (د) د(س) = $(س − ١)^3 + ٢$

١٨) د(س) = $\frac{س^2}{|س|} − ٢$ مداها ـــــ

(أ) ح − {٠} (ب) ح − {−٢} (ج)]−٢، ∞[

١٩) قاعدة الدالة الممثلة بالشكل

(أ) د = |$س^2$ − ١| (ب) د = |$س^2$| − ١

(ج) د = |$س^2$ + ١| (د) د = $|س + ١|^2$

٢٠) إذا كان $س^{\frac{ع}{٢}} = ٩$ ، $ص^{\frac{ع}{٢}} = ٨١$ فإن |٢س − ص| =

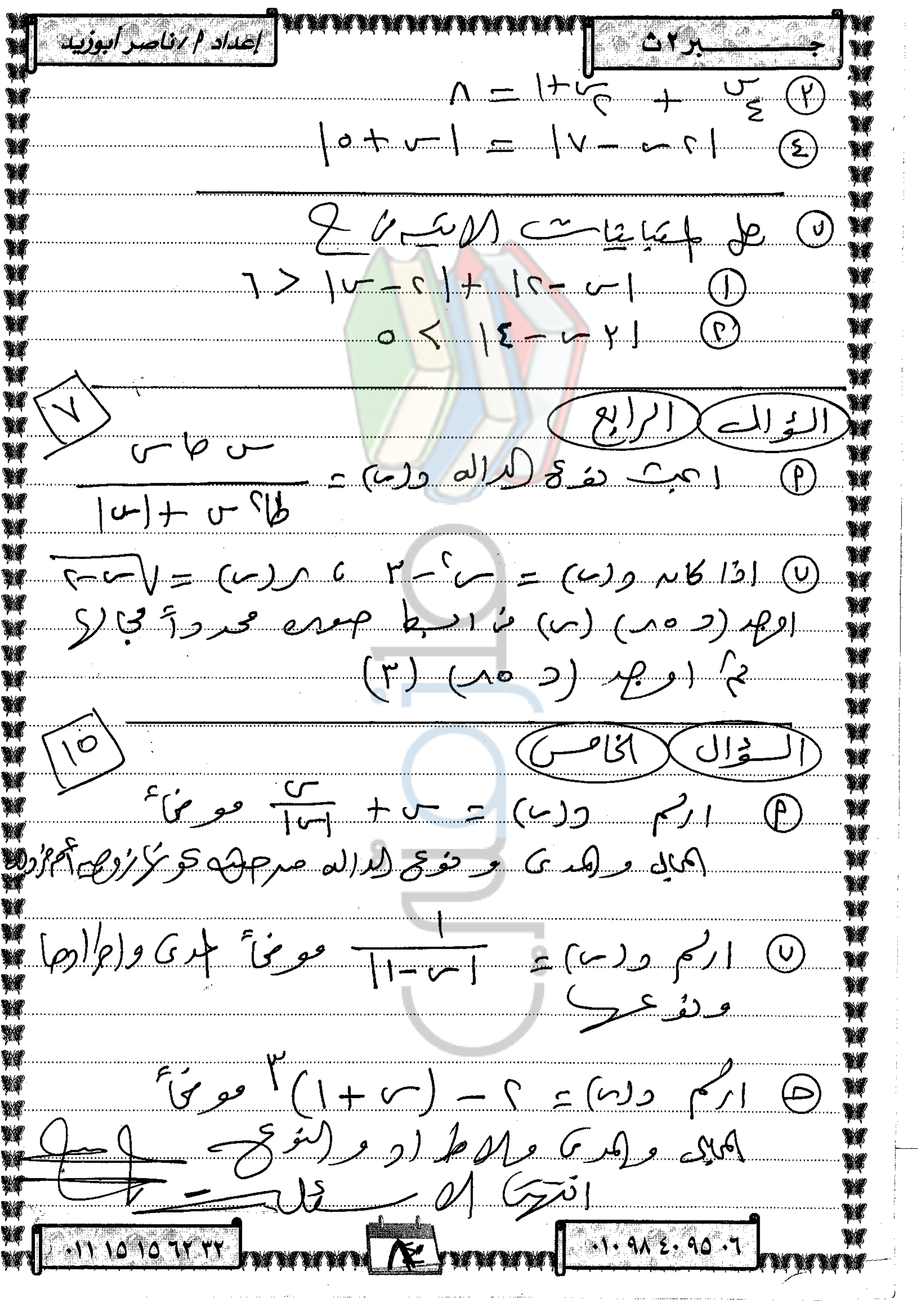
(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) ٩

السؤال الثالث

(أ) حل المعادلات الآتية ١٨

١) $٢^س + ٢^{٥ − س} = ١٢$

٢) $٥^{س + ١} + ٥^{٢ − س} = ١٢٠$



(٣) $\frac{س}{٤} + ص^٢ + ١ = ٨$

(٤) $|٢س - ١٧| = |س + ١٥|$

(ب) حل المتباينات الآتية في ح

(١) $|س - ٢| + |س - ٣| < ٦$

(٢) $|٢س - ٤| > ٥$

السؤال الرابع (٧)

(أ) ابحث نوع الدالة $د(س) = \frac{س ظا س}{ظا^٢ س + |س|}$

(ب) إذا كانت $د(س) = س^٢ - ٣$ ، $ر(س) = \sqrt{س - ٣}$

أوجد ($د \circ ر$) (س) في أبسط صورة محدداً مجالها

ثم أوجد ($د \circ ر$) (٣)

السؤال الخامس (١٥)

(أ) ارسم $د(س) = س + \frac{س}{|س|}$ موضحاً

المجال والمدى ونوع الدالة من حيث كونها زوجية أم فردية

(ب) ارسم $د(س) = \frac{١}{|س - ١|}$ موضحاً المدى واطرادها

ونوعها

(جـ) ارسم $د(س) = ٢ - (س + ١)^٣$ موضحاً

المجال والمدى والاطراد والنوع

انتهت الأسئلة